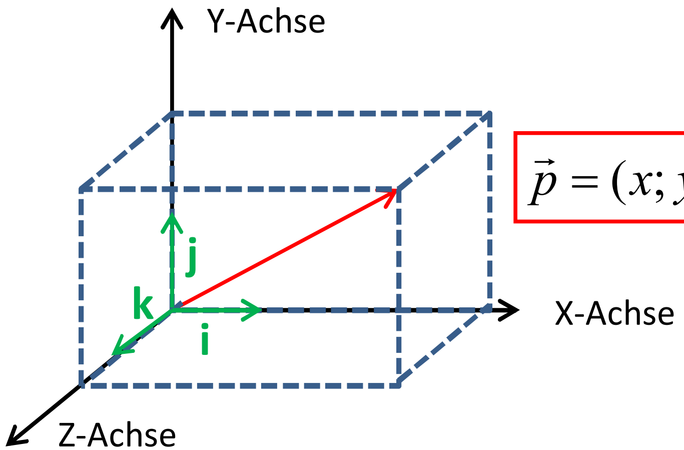
VORKURS

09.10.2020

EUKLIDISCHER VEKTORRAUM

Als Grundlage für Geraden- und Ebenenberechnung im 3-dimensionalen Raum dient der Euklidische Verktorraum $\Re x \Re x \Re = \Re^3$.

Die Vektoren können nicht nur senkrecht, sondern auch in der waagerechten der sogenannten **transponierten** Form $(x; y; z)^T$ dargestellt werden.



$$\boxed{\vec{p} = (x; y; z)^T}$$

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} i = (1;0;0)^T \\ j = (0;1;0)^T \\ k = (0;0;1)^T \end{array}}\right\}$$ Koordinaten-einheitsvektoren

Betrag: $|\vec{p}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Winkel: $\cos(i, \vec{p}) = \frac{x}{r}; \cos(j, \vec{p}) = \frac{y}{r}; \cos(k, \vec{p}) = \frac{z}{r}$

VEKTORENKLASSEN

Für die Vektorrechnung im Bereich von Geraden, Ebenen und Körper ist es wichtig die beiden möglichen Arten von Vektoren zu unterscheiden.

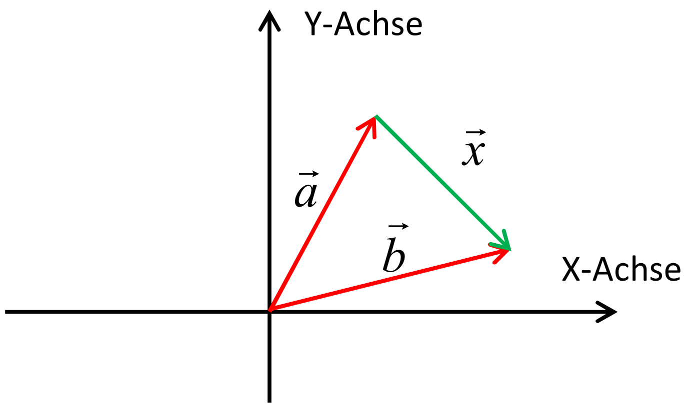
- ✓ <u>Ortsvektor</u>: Stellt die direkte Verbindung vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt im Raum dar. $\vec{a} = \overline{0A}$

- ✓ <u>Richtungsvektor</u>: Werden zwei beliebige Punkte im Raum verbunden, so erhält man den Richtungsvektor, der sich stets aus der Differenz zwischen Endpunkt und Anfangspunkt berechnet. $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

<u>Beispiel</u>:

✓Ortsvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

✓Richtungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$



DAS SKALARPRODUKT

Bei der Multiplikation von zwei Vektoren nutzt man die Methodik des **inneren Produkts**.

$$\theta(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Es werden demzufolge die einzelnen Komponenten untereinander multipliziert und die Ergebnisse anschließend addiert. Als Ergebnis bekommt man somit keinen Vektor, sondern eine **reelle Zahl**.

Eigenschaften:

- nicht binär $\Re^n * \Re^n \to \Re$
- kommutativ $\theta(\vec{a},\vec{b}) = \theta(\vec{b},\vec{a})$
- assoziativ $\beta \cdot \theta(\vec{a},\vec{b}) = \theta(\beta \cdot \vec{a},\vec{b}) = \theta(\vec{a},\beta \cdot \vec{b})$
- distributiv $\theta(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = \theta(\vec{a},\vec{c}) + \theta(\vec{b},\vec{c})$
- positiv definiert $\theta(\vec{a},\vec{a}) > 0 \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot b_i = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = 3$$

ÄUßERES PRODUKT (VEKTORPRODUKT)

Eine weitere Möglichkeit zwei Vektoren zu multiplizieren ist das **äußere Produkts**.
Es wird stets diagonal multipliziert (siehe Determinaten), wobei rechts herum positiv und links herum negativ gerechnet wird.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

<u>Eigenschaften</u>:

- Binäre Operation: $\Re^n \times \Re^n \to \Re^n$
- antikommutativ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- assoziativ $\beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \beta \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \beta \cdot \vec{b}$
- distributiv $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LÄNGE / WINKEL VON VEKTOREN

Da es sich bei einem Vektor um ein n-dimensionales Objekt handelt, kann der erreichte Punkt entweder mittels Koordinaten oder via Länge und Winkel dargestellt werden.

- Länge: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\theta(\vec{a},\vec{a})}$

  Normierter Vektor: $\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ *(Länge ist Eins)*

  Abstand $D(\vec{a},\vec{b})$*:* $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \ldots + (a_n-b_n)^2}$

- Winkel: $\theta(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = \sqrt{\theta(\vec{a},\vec{a})} \cdot \sqrt{\theta(\vec{b},\vec{b})} \cdot \cos\alpha$

  Cauchy-Schwarze Ungleichung $\alpha = \arccos \frac{\theta(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow -1 \le \frac{\theta(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \le 1$

  Orthogonalitätskriterium: $\cos(90^\circ) = 0 \Rightarrow \theta(\vec{a},\vec{b}) = 0 \wedge \left(|\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0\right)$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie – sofern möglich - das innere / äußere (im R³) Produkt der folgenden Vektoren untereinander sowie deren Summe/ Differenz und bilden Sie jeweils den normierten Vektor.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen anschließend deren Abstände.

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ X \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ Y \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

LINEARE (UN)ABHÄNGIGKEIT

Grundlage der (Un)Abhängigkeit von Vektoren ist dessen **Linearkombination**, d.h. es wird jeder Vektor mit einem beliebigen **Skalar** multipliziert und anschließend die Summe gebildet.

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \ldots + \zeta \cdot \vec{z}$$

Im Fall der (Un)Abhängigkeits-Prüfung untersucht man, ob einer der Vektoren mittels einer Linearkombination der übrigen darstellbar ist, d.h. man bildet die Linearkombination der Vektoren und setzt diese Kombination gleich Null.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \beta \cdot \vec{b} + \ldots + \zeta \cdot \vec{z} \Leftrightarrow \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \ldots + \zeta \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

Existiert nur die sogenannte **Triviallösung** der Form $\alpha = \beta = \ldots = \zeta = 0$, dann sind die Vektoren **linear unabhängig**. Sollte eine der entstehenden Lösungen$\neq 0$ sein, dann sind sie **linear abhängig**.

<u>Beispiel</u>: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = -2 \end{matrix}$

BASIS / SPAN

In einer **Basis** sind Objekte/ Vektoren enthalten, die einen zugehörigen **n-dimensionalen** Raum komplett auf**span**nen können.

Demzufolge besteht der Euklidische Vektorraum $\Re^3$ aus den 3 **Koordinaten-Einheits-Vektoren**:

$$\left.\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \left.\begin{array}{l} \textit{linear unabhängig} \\ \textit{normiert (Länge 1)} \\ \textit{orthogonal} \end{array}\right\} \textbf{Orthonormalsystem}$$

Grundvoraussetzung ist die lineare Unabhängigkeit, d.h. eine begrenzte Anzahl von linear unabhängiger Vektoren bilden eine Basis, wobei die Anzahl der enthaltenen Vektoren die Dimension des Raums angibt.

Die Dimension ist unabhängig von der Anzahl der Komponenten/ Koordinaten eines Vektors.

<u>Beispiel</u>: *Die drei Vektoren (letztes Beispiel) sind linear unabhängig und bilden demzufolge auch eine Basis. Da es sich um drei Basisvektoren handelt, spannen Sie einen Raum der 3. Dimension auf.*

LÖSUNGSMETHODIK

Frage: Bilden die gegebenen Vektoren eine Basis des $\Re^3$?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\left| \begin{array}{llllr} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & +1\beta & +1\gamma & = & 0 \\ -2\alpha & -3\beta & +5\gamma & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} | \cdot (-3) \quad | \cdot 2 \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{llllr} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = & 0 \\ 0 & -5\beta & +10\gamma & = & 0 \\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot 5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{llllr} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = & 0 \\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = & 0 \\ 0 & 0 & +5\gamma & = & 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$ Triviallösung: Die Vektoren sind linear unabhängig.

Es handelt sich somit um eine Basis $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ mit der Dimension 3.

Somit kann durch diese Basis der $\Re^3$ aufgespannt werden.

,
,

AUFGABEN

1) Sind die folgenden 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig?
Stellen Sie den Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2) Prüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren eine Basis bilden und geben die maximal mögliche Dimension mit dem zugehörigen Raum an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3) Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta \in \Re$ so, dass das Vektorsystem (v_1, v_2, v_3) mit $v_1 = (1, \alpha, -1)^T$, $v_2 = (2, 1, 0)^T$ und $v_3 = (-3, -\beta, 1)^T$ linear unabhängig ist.

GERADENGLEICHUNG

Eine Gerade ist die graphische Darstellung einer linearen Gleichung bestehend aus **Steigung** und **Startpunkt** bzw. Achsenabschnitt und wird in folgenden zwei Arten dargestellt.

- ✓ Parameterfreie Form: $y = m \cdot x + b$

  b=Achsenabschnitt; m = Steigung

- ✓ Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \alpha \cdot \overline{AB}$

  $\vec{a}$ = Ortsvektor (Startpunkt); $\overline{AB}$= Richtungsvektor

Beispiel:

- ✓ Parameterfreie Form:

$$\left.\begin{array}{l} A = (3;5) \\ B = (2;7) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{7-5}{2-3} = -2 \\ b = y - m \cdot x = 7 - (-2) \cdot 2 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2 \cdot x + 11$$

- ✓ Parameterform:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} (-1) - 2 \\ 2 - 1 \\ 2 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN ZU GERADEN

1) Berechnen Sie das äußere Produkt der folgenden Vektoren.

   a) $\vec{a} = (2;-1;3)^T ; \vec{b} = (-1;2;5)^T$ b) $\vec{c} = (-2;4;1)^T ; \vec{b} = (5;3;1)^T$

2) Berechnen Sie sowohl die parameterfreie als auch die Parameterform der Gerade durch die folgenden Punkte und fertigen Sie eine Skizze an.

   a) $A = (2;5); B = (-2;3)$ b) $A = (-1;3); B = (2;-6)$

3) Geben Sie die Parameterform der Geraden durch folgende Punkte an.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

LAGERELATION VON GERADEN I

Im Euklidischen Vektorraum $\Re^3$ handelt es sich um einen **3-dimensionalen Raum**, der durch die 3 Koordinanteneinheitsvektoren als **Basis** definiert ist.
Da eine Gerade nur ein 2-dimensionales Objekt ist, existieren insgesamt vier mögliche Lagerelationen:

*Gerade = Startpunkt + Parameter * Richtungsvektor*

- ✓ parallel: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **nicht auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ identisch: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ schneiden sich: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich eine **eindeutige Lösung** für die Parameter.
- ✓ windschief: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich ein **Widerspruch** für die Parameter.

LAGERELATION VON GERADEN II

Aufgrund der definierten Lagerelationen ergibt sich der folgende Entscheidungsbaum:

$$g_1 : \vec{x}_1 = \vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{b}_1 \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \vec{a}_2 + \beta \cdot \vec{b}_2$$

$$\vec{b}_1 = \gamma \cdot \vec{b}_2$$ *Abhängigkeit der Richtungsvektoren*

- JA: *Prüfen des Startpunkts* $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{b}_1$
  - JA: *identisch*
  - NEIN: *parallel*
- NEIN: $g_1 = g_2$ *Gleichsetzen der Geraden*
  - JA: *Schnittpunkt*
  - NEIN: *windschief*

LAGERELATION VON GERADEN III

<u>Beispiel</u>: $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. *Abhängigkeit der Richtungsvektoren*: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma = 3 \\ \gamma = 1 \\ \gamma = -4 \end{matrix}$

2. *Gleichsetzen der Geraden*: $g_1 = g_2 \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ -2\alpha & 2\beta & = & -2 \\ -4\alpha & -1\beta & = & 6 \end{matrix} \right| \begin{matrix} | \cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} | \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ 4\alpha & 0 & = & -8 \\ -7\alpha & 0 & = & 9 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \alpha = -2 \wedge \alpha = -\frac{9}{7}$$

Aufgrund des Widerspruchs müssen die beiden Geraden windschief zueinander liegen.

,
,

AUFGABEN ZUR LAGERELATION

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

a) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden und geben deren Lage zueinander an.

a) $g_1 : \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $g_2 : \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{a} = (2;-2;5)^T ; \vec{b} = (-1;1;3)^T$ $\qquad$ $g_2 : \vec{c} = (-1;3;2)^T ; \vec{d} = (3;-2;5)^T$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE I

Zur Berechnung von einem Abstand definieren wie den **Punkt** *Q* und die Gerade in der Form $g_n : \vec{x}_n = P_n + \alpha \cdot \vec{b}_n$ mit P_n als **Startpunkt** und $\vec{b}_n$ als **Richtungsvektor** der Geraden *n*.

- ✓ Punkt zu Gerade: $d = \dfrac{\left|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}$

- ✓ Gerade zu Gerade (**parallel**): $d = \dfrac{\left|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}$

- ✓ Gerade zu Gerade (**windschief**): $d = \dfrac{\left|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\right|}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE II

Beispiel Punkt zu Gerade: $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 10 - 20 \\ -4 - (-15) \\ -15 - (-2) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-10)^2 + 11^2 + (-13)^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{390}{29}} \approx 3{,}67$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE III

<u>Beispiel Gerade zu Gerade:</u>
(parallel)

$$g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 7-12 \\ -3-14 \\ 8-(-1) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (17)^2 + 9^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{395}{14}} \approx 5{,}31$$

BEISPIELE ABSTAND

Gerade zu Gerade:
(windschief)

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\right|}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}}$$

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) * \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{\left|-15 + 6 - 15\right|}{\sqrt{38}} = \frac{24}{\sqrt{38}} \approx 3{,}89$$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie von den gegebenen Vektoren deren Winkel miteinander und mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie auch das Vektorprodukt sowie den Abstand der Vektoren.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen den Flächeninhalt des sich aufspannenden Rechtecks.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3x \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2x \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4x \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -5x \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

,
,

AUFGABEN ZUR LAGERELATION

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

a) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

2) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Euklidischer Vektorraum

Richtungsvektor

Vektorprodukt

Ortsvektor

Skalarprodukt

Geradengleichung

Basis

Span

Lagerelation

lineare Abhängigkeit

Betrag

Winkel

Abstände

ALLES VERSTANDEN ?!?

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Warum ist ein Vektor eine gerichtete Größe?
- ✓ Wann stehen zwei Vektoren senkrecht aufeinander?
- ✓ Was ist eine binäre Operation?
- ✓ Was versteht man unter einen Orts- und einen Richtungsvektor?
- ✓ Wann sprechen wir von einer Basis?
- ✓ Worin unterscheiden sich parameterfreie und Parameterform?
- ✓ Wie können Geraden im $\mathbb{R}^3$ zueinander liegen?
- ✓ Was beschreibt der Stellungsvektor?
- ✓ Wie normieren Sie ein Vektorsystem?