VORKURS

07.10.2020

DEFINITION EINES LOGARITHMUS

Der Logarithmus dient zur Berechnung eines variablen Ausdrucks im Exponenten.

Es gilt: $\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}}$

<u>10er-Logarithmus:</u>
Ein Logarithmus ohne Angabe einer Basis ist immer zur Basis 10. $\log x = \log_{10} x$

Beispiel: $\log 10.000 = \log_{10} 10^4 = 4$

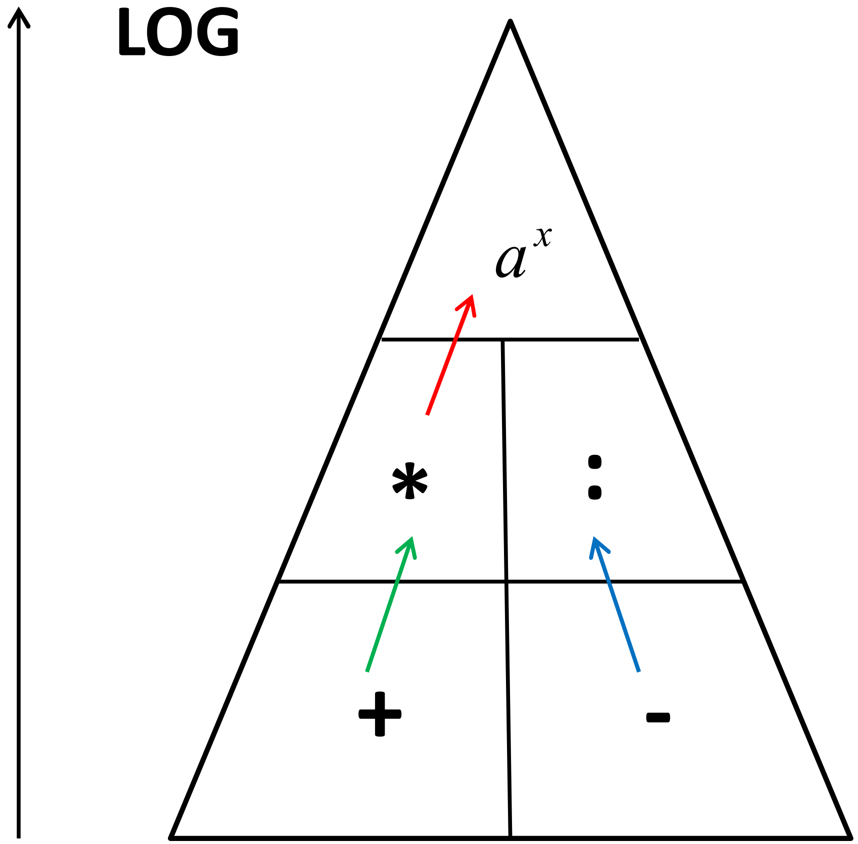
<u>Logarithmus naturalis:</u>
Der Logarithmus zur Basis *e* ist der natürliche Logarithmus. $\ln x = \log_e x$

Beispiel: $\ln 42 = \log_e 42 = 3{,}737$

<u>Logarithmus dualis:</u>
Ein Logarithmus zur Basis 2 nennt man dualis. $ld(x) = \log_2 x$

Beispiel: $ld(32) = \log_2 2^5 = 5$

LOGARITHMUS-GESETZE



$$\boxed{3 \cdot \log 4 = \log 4^3 = \log 64}$$

$$\boxed{\log 2 + \log 3 = \log 2 \cdot 3 = \log 6}$$

$$\boxed{\log 8 - \log 2 = \log \frac{8}{2} = \log 4}$$

AUFGABEN

1) Ein Kapital von 2000 EURO wird bei einer vierteljährlichen Verzinsung zu 2% zehn Jahre lang auf eine Bank eingezahlt.
   a) Wie hoch ist der Kontostand nach den 10 Jahren?
   b) Wie hoch wäre der Zinssatz bei einer jährlichen Verzinsung?
   c) Wie lange lag das Geld auf der Bank bei einem Endbetrag von 9.750,88 EURO?

2) Ein Gartenteich mit einem Inhalt von 1000 Litern hat ein kleines Loch, wodurch er wöchentlich 5% Inhalt verliert.
   a) Wie viel cm³ sind nach einem Jahr noch vorhanden?
   b) Nach wie vielen Tagen sind weniger als 50% in dem Teich?

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

3) $5 \cdot \log(2x) + 4 \cdot \log(\sqrt{0{,}5x}) - 0{,}5 \cdot \log(16x^4) - 2 \cdot \log\left(0{,}25\right)$

4) $2 \cdot \ln(3a^2) - 6 \cdot \ln(\sqrt[3]{2a^4}) + \frac{1}{3} \cdot \ln(27\left(a^2\right)^6) - 4 \cdot \ln\left(\frac{2}{a}\right)$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

LOG - Definition

10-er Logarithmus

Logarithmus naturalis

Logarithmus dualis

LOG - Gesetze

Methode beim Zusammenfassen

LOG - Eigenschaften

LOG - Schätzwert

ALLES VERSTANDEN ?!?

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann spricht man von einer Exponentialfunktion?
- ✓ Was sagt Ihnen der Wachstumsfaktor?
- ✓ Was bedeutet Halbwertszeit?
- ✓ Was können Sie durch die Art des Logarithmus erkennen?
- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen LOG und LN?
- ✓ Wie lautet der Definitionsbereich von Log(x-1)?
- ✓ Wie lautet die Umkehrfunktion von LD(x)?
- ✓ Aus welchen 3 Schritten besteht das Lösen von Log-Ausdrücken?

OPERATION UND GEGENOPERATION

Die zu einem Logarithmusausdruck zugehörige Gegenoperation ist stets ein Exponentialoperator, wodurch sich beide neutralisieren.
Die Zusammenhänge ergeben sich wie folgt:

$$\boxed{\log 10^{\Psi} = 10^{\log \Psi} = \Psi} \quad \boxed{\ln e^{\Omega} = e^{\ln \Omega} = \Omega} \quad \boxed{ld\, 2^{\Theta} = 2^{ld\Theta} = \Theta}$$

Aufgrund dieser Vereinfachungen, muss die zugehörige Basis bzw. der Exponent im ersten Schritt mittels exponentieller/ logarithmischer Gesetze passend umgeformt werden.

Beispiel:

$$\log \frac{1}{1000} - 4 \cdot \ln \sqrt{e} + \frac{1}{2} \cdot ld16 + 0{,}1^{\log 0{,}25} + \left(\frac{1}{e^2}\right)^{\ln \frac{1}{3}} - 8^{ld3}$$

$$\log 10^{-3} - 4 \cdot \ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot ld2^4 + 10^{(-1)\cdot \log \frac{1}{4}} + e^{(-2)\cdot \ln \frac{1}{3}} - 2^{3\cdot ld3}$$

$$-3 - 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 3^3 = -3 - 2 + 2 + 4 + 9 - 27 = -17$$

AUFGABEN

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $$\frac{1}{6}\cdot ld2^3+3\cdot e^{2\cdot\ln 0{,}5}-\log\sqrt{10}+4\cdot(2^{4\cdot ld\frac{1}{2}}-8\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{e}})-4\cdot 10^{\frac{1}{4}\cdot\log 256}$$

2) $$\frac{2}{3}\cdot(\log 1\,000-\frac{1}{2})-\frac{2}{e^{\ln 0{,}5}}+2^{3+ld3}-(10^2)^{\log 3}+\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)^2-4\cdot ld\sqrt{2}$$

3) $$\left(\frac{1}{8}\right)^{ld2}-6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}+\frac{1}{4}ld64-\frac{1}{2}\log\frac{1}{1000}+\sqrt[3]{e}^{\ln 27}$$

4) $$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\ln\frac{1}{9}}+100^{\log\frac{1}{2^{-2}}}-16^{\frac{1}{2}ld4}+2\log 0{,}001-3\ln\frac{1}{e^3}+\frac{1}{4}ld\frac{1}{256}$$

5) $$6\ln\sqrt[3]{e^2}-\frac{8}{e^{2\ln 0{,}5}}-(\frac{1}{2}e^{\ln 3^2}-\ln\frac{1}{\sqrt{e}})+\frac{8}{\ln e^2}+e^{2\ln 3}-2\cdot(e^{2\ln 2}+\ln\frac{1}{\sqrt[4]{e}})$$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Wachstumsfunktion

Zerfallsfunktion

Halbwertszeit

reduzierter Prozentsatz

vermehrter Prozentsatz

unterjährige Verzinsung

Operation / Gegenoperation

Basistransformation

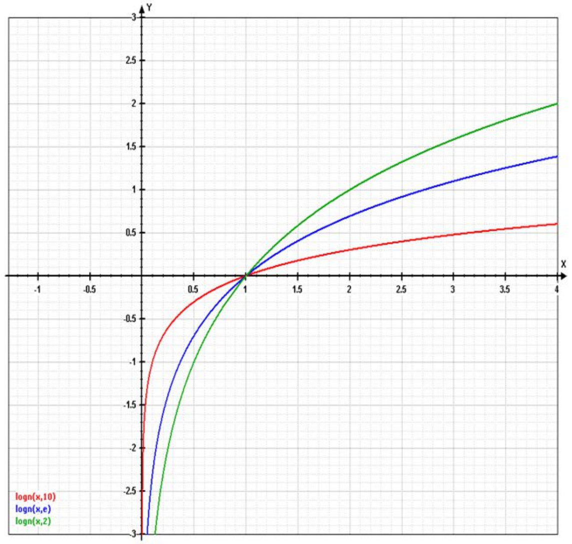
ALLES VERSTANDEN ?!?

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

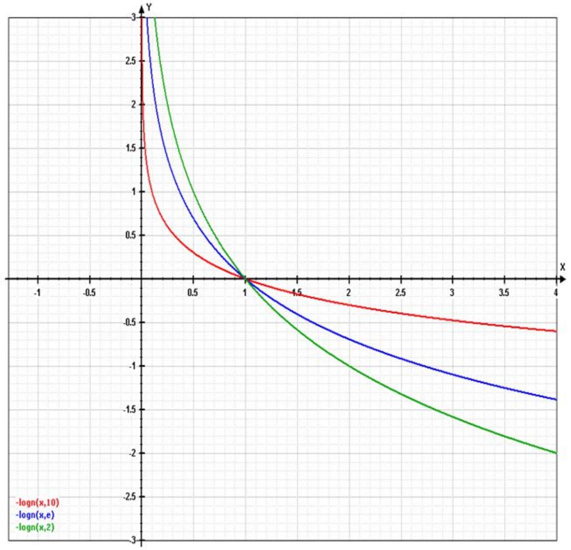
- ✓ Durch welchen Punkt verläuft jede Exponentialfunktion (Warum)?
- ✓ Worin besteht der Unterschied zwischen Ergebnis und Lösung?
- ✓ Welchen Einfluss hat die Basis auf eine Exponentialfunktion?
- ✓ Was bewirkt das Addieren einer Konstanten zu einer Funktion?
- ✓ Was bedeutet Operation <-> Gegenoperation?
- ✓ Wie machen Sie die Basis zum Logarithmus passend?
- ✓ Wie neutralisieren Sie einen Logarithmus?
- ✓ Welche Gesetze der Potenz- und Logarithmenrechnung nutzen Sie?

FUNKTIONSGRAPHEN

Positiver Logarithmus:



Negativer Logarithmus:



- Ausschließlich positive Steigung
- Ausschließlich negative Steigung

- Gemeinsamer Punkt: (1/0)
- Je größer die Basis, desto flacher ab x=1
- Je größer die Basis, desto steiler vor x=1

DEFINITIONS-/ WERTEBEREICH

Definitionsbereich:
Wie man schon durch die Funktionsgraphen erkennen kann, darf man einen Logarithmus nur von positiven Zahlen ziehen.

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} = \mathbb{R}^+$, da $10^x > 0 \Leftrightarrow \log(>0) = x$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} &\ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = y \\ &\left(x^2 - 5x + 6\right) = (x-3)\cdot(x-2) > 0 \end{aligned}\right\} \quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x > 3 \vee x < 2\}$$

Wertebereich:
Aufgrund der Funktionsgraphen ist ersichtlich, dass ein Logarithmus alle reellen Werte annehmen kann.

$\mathbb{W} = y \in \mathbb{R}$, da $10^{(>0)} > 1 \wedge 10^{(\leq 0)} \leq 1$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} &12 - 3 \cdot \ln(5x - 3) = y \\ &12 - 3 \cdot \left]-\infty; \infty\right[\Rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \quad \mathbb{W} = y \in \mathbb{R}$$

DIE LOGARITHMEN-GLEICHUNG

Sofern eine reine Logarithmengleichung existiert kann man diese mit der folgenden Methodik lösen, wobei primäres Ziel eine Isolierung des Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung ist:

<u>Methodik:</u>

1. Die Faktoren vor dem Logarithmus in den Exponenten verschieben.
2. Alle positiven Terme über den Bruchstrich, alle negativen darunter schreiben.
3. Streichen der Logarithmen auf beiden Seiten.
4. Lösen der Gleichung.

Beispiel: $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log 2 - \frac{1}{2} \cdot \log x^4 = 2 \cdot \log 4 - \log(x-2)$

$$\log x^2 - \log 2^3 - \log\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}} = \log 4^2 - \log(x-2)$$

$$\log \frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \log \frac{16}{x-2}$$

$$\frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \frac{16}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = 16 \cdot 8 = 128 \Leftrightarrow x = 130$$

AUFGABEN I

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3 \cdot \log x - 4 \cdot \log \frac{2}{x} - \frac{1}{3} \cdot \log\left(x^2\right)^6 = \frac{2}{3} \cdot \log 27 + \frac{1}{2} \cdot \log x^4 - 2 \cdot \log 6$

2) $3 \cdot \ln 4 - 0{,}5 \cdot \ln \frac{16}{x^4} + 2 \cdot \ln 8 = 1{,}5 \cdot \ln x^4 - 8 \cdot \ln \sqrt[4]{\frac{1}{x}} - 2 \cdot \ln \frac{1}{4}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x) = \frac{2}{5} \cdot \ln\left(4x - 3 - x^2\right)$ 4) $g(x) = 42 + \log\left(2 - \sqrt{x-2}\right)$ 5) $h(x) = \frac{42}{ld(3 \cdot x + 6)}$

III. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $\log \frac{1}{1000} - 4 \ln \sqrt{e} + 16^{ld \sqrt{3}} + 2e^{2 \cdot \ln 3} - \left(10^{\log 12} + 2ld\, 4\right)$

2) $6 \cdot \log \sqrt[3]{10} + 4^{ld\, 3} - 2 \cdot \ln \frac{1}{e^2} - 0{,}2 \cdot ld\left(32^5\right) + \left(\frac{1}{100}\right)^{\log \frac{1}{3}} - \left(\sqrt{e}\right)^{\ln\left(5^4\right)}$

AUFGABEN II

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $\frac{1}{4}\cdot\log(256x^8)-2\log\frac{\sqrt{9}}{x^2}-0{,}5\cdot\log\frac{x^4}{9}=1{,}5\cdot\log(9x^4)+3\cdot\log\frac{1}{2x^3}+4\cdot\log\sqrt{27\cdot x}$

2) $6\cdot\ln\sqrt[3]{3}-4\cdot\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{x}}+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{9}{x}\right)=2\cdot\ln\frac{\sqrt{x^3}}{3}-0{,}25\cdot\ln(16x^8)+3\cdot\ln\frac{8}{x^2}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\ln\left(x^2-6\cdot x-40\right)$

4) $g(x)=\log\left(\sqrt{2x+4}-8\right)-12$

5) $h(x)=\frac{3\cdot x}{\ln\left(15-3\cdot x\right)}$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Logarithmengleichung

Fakultät

Wertebereich

Funktionsgraphen

Definitionsbereich

Ableitungen

Achsenspiegelungen

ALLES VERSTANDEN ?!?

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was und warum ergibt $ln(1)$?
- ✓ Wie kann man die Logarithmus-Funktion zeichnen?
- ✓ Was sind die wesentlichen Punkte der Umkehrfunktion?
- ✓ Wie kann man eine Ln-Funktion an beiden Achsen spiegeln?
- ✓ Wie verläuft die ln(x)-Funktion im Vergleich zu Log(x)?
- ✓ Welchen Definitions-/ Wertebereich hat die LN-Funktion?
- ✓ Wann spricht man von einer Logarithmus-Gleichung?
- ✓ Worauf ist bei Lösung solch einer Gleichung zu achten?