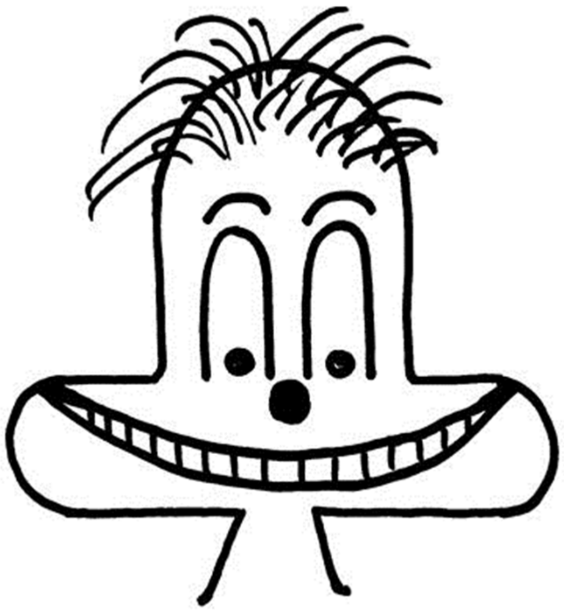
Mathematik Vorkurs



05.10.2020 – 09.10.2020

Vorkurs Mathematik 2020

Torsten Schreiber

Mathematik ist begreifbar...

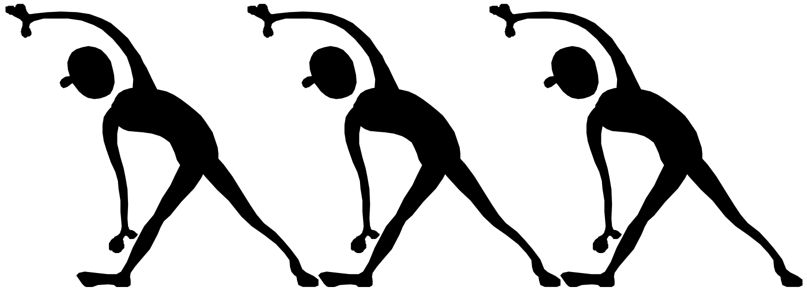
www.mathematik-guru.de

… und macht sogar Spaß!

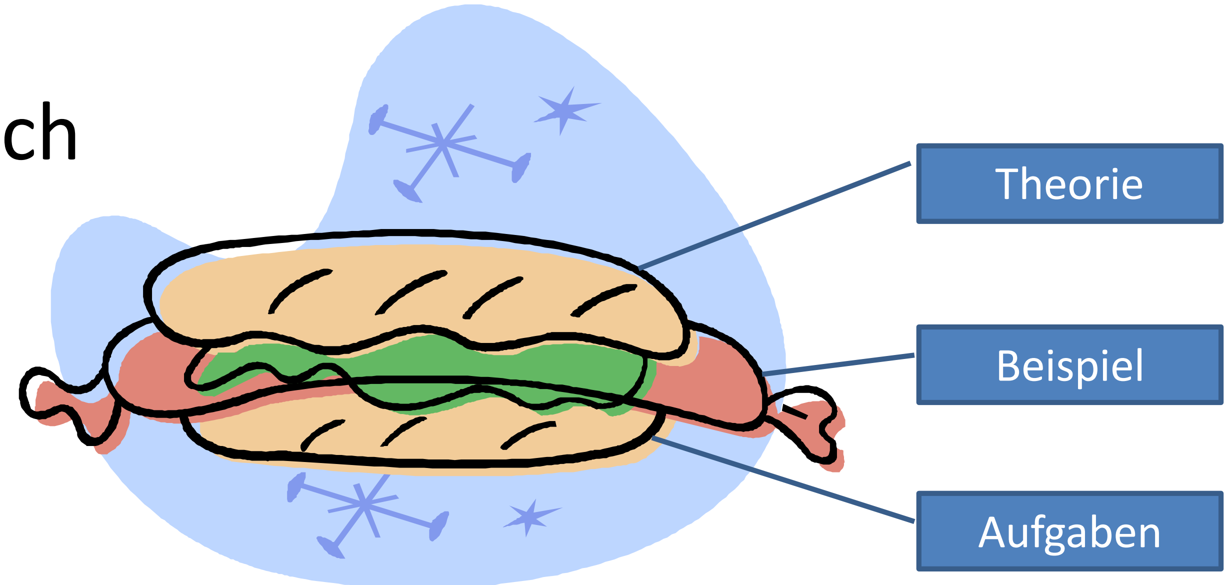
schreiber@mathematik-guru.de

Methodik meiner Veranstaltung

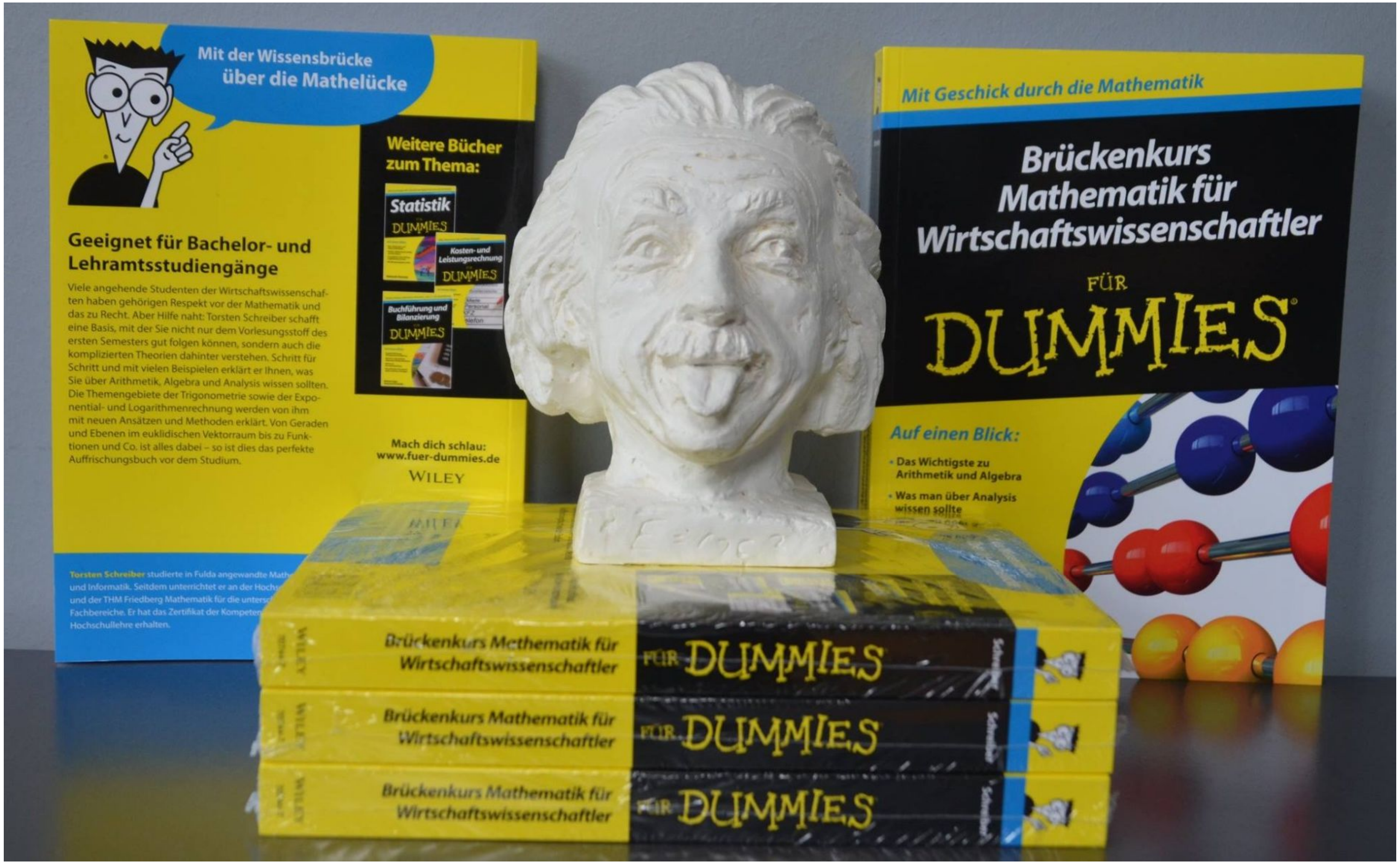
- WarmUp



- n-Sandwich



Mein Buch

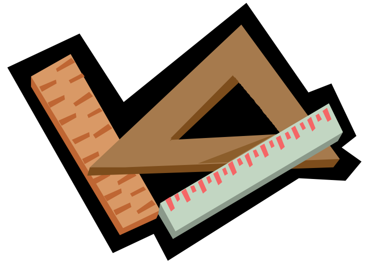


ISBN: 978-3527707447

Themengebiete des Vorkurses

1. **Mengen**
   Grundlagen / Gesetze und Junktoren / Zahlenmengen
2. **Komplexe Zahlen**
   Definition und grafische Darstellung / Grundrechenarten
3. **einfache Bruchrechnung**
   Rechengesetze / Methodiken
4. **erweiterte Bruchrechnung**
   leichte Gleichungen / Doppelbruch
5. **Rechnen mit Potenzen / Wurzeln**
   ganz- und gebrochen rationaler Exponent
6. **Exponential- / Logarithmenrechnung**
   Rechengesetze und graphische Darstellung
7. **Gleichung / Ungleichungen mit einer Unbekannten**
   Rechnung und Grafik
8. **Gleichung / Ungleichungen mit 2 Unbekannten**
   Additions-, Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren; grafische Lösung
9. **(Bi)-quadratische Gleichung**
   quadratische Ergänzung, p-q-Formel, Satz von Vieta
10. **Lineare Gleichungssysteme**
    Gauß'sche Eliminationsverfahren
11. **Trigonometrie am Einheitskreis und im allgemeinen Dreieck**
    Funktionsgraph und Berechnungen (Additionstheoreme)
12. **Vektorrechnung**
    Euklidischer Vektorraum / Lagerelation von Geraden im R^3

Die Klausur



Theorie der schönen Zahlen

Taschenrechner brauchen wir nicht!

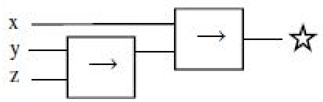
Bücher gehören in die Bibliothek – außer das von mir

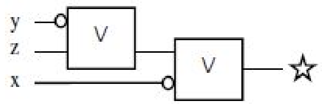
Alles was ich geschrieben habe, darf ich auch nutzen.

1. **Mengenlehre (8 Punkte):**
Gegeben sind die Menge A der natürlichen Zahlen (größer 7 und kleiner gleich 22), die durch 2 oder 3 oder auch durch 5 teilbar sind und die Menge B der nicht durch zwei teilbare Zahlen im Intervall von $]6;24]$.
Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

2. **Aussagenlogik (8 Punkte):**
Geben Sie für die folgenden beiden Schaltungen die zugehörigen Aussageformeln an und zeigen Sie, dass beide Ausdrücke äquivalent zueinander sind (Begründung).

I.


II.


3. **Bruchrechnung (8 Punkte):**

a) $\left[2\frac{1}{3}-1{,}5\cdot\left(3-\frac{2}{x}\right)+\frac{7}{10}+\frac{3}{x}\cdot(0{,}5x-1)\right]:\frac{1}{3}$

b) $\dfrac{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4(a-2b)^2}}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-4ab+4b^2}}$

4. **Komplexe Zahlen (8 Punkte):**
Berechnen Sie die Lösungen der folgenden komplexen Gleichungen und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form z=a+bi an. Bestimmen Sie bei Aufgabe b) zusätzlich noch den Betrag und das Argument.

a) $z=\frac{5i\cdot(3+9i)}{(3i+1)^2}-\frac{(4i-3)^2}{(1-3i)}$

b) $z^2-(6i-4)\cdot z=12i+9$

5. **Arithmetik (8 Punkte):**
Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $-\left[\left(2x-\frac{1}{2}z\right)^4-\left(\frac{1}{4}z^2+12x^2\right)^2\right]-16x^3\cdot(8x+z)$

b) $14\cdot\left[x-\left(2y-2\cdot(x-(2z+3y))-4\cdot(2y+z)\right)\right]$

6. **Exponential-/Logarithmusrechnung (16 Punkte):**
Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitestgehend:

a) $\frac{2\cdot(27x^2y^3z^{-2})^3}{(8x^2y^{-5}z^3)^{-2}} : \frac{3\cdot(0{,}25xy^{-5}z^{-3})^{-3}}{(9^{-1}x^{-3}y^4z^2)^4}$

b) $\frac{\sqrt[4n]{a^{8n-3}}}{\sqrt[2n]{a^{5n-2}}} : \frac{\sqrt[n]{(\sqrt{a})^{3n+2}}}{\sqrt[2n]{\sqrt{a^{3+7n}}}}$

c) $4^{ld3} + \log 0{,}001 + 2\cdot\sqrt[3]{e}^{-ln8} + \frac{1}{4}\cdot ld\frac{1}{256} - \left(\frac{1}{100}\right)^{log0{,}25} - 3\cdot ln\sqrt[3]{\frac{1}{e^8}}$

d) $3\cdot logx - log2 + 3\cdot(log2 - logx^2) = 2\cdot log\frac{1}{4} + 4\cdot\left(logx + 0{,}5\cdot log\sqrt{2}\right) - 2\cdot logx^4$

7. **Parabelfunktion (8 Punkte):**
Berechnen Sie den Scheitelpunkt, die Schnittpunkte mit beiden Achsen und beschreiben den Verlauf der Parabeln.

a) $f(x) = -4x^2 + 8x + 32$ b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5x + 18$

8. **Ungleichungen (8 Punkte):**
Berechnen Sie den Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen.

a) $3\cdot|8-2x| \leq 36$ b) $\frac{(x-2)^2}{x-8} > 6 + x$

9. **Gleichungen mit einer Unbekannten (8 Punkte):**
Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie – sofern erforderlich – den Definitionsbereich an.

a) $x^5\cdot(x^5-33) = -32$ b) $2x\cdot(x-2)\cdot(x+2) + 8x^2 = 16 + 2x\cdot(x+2)$

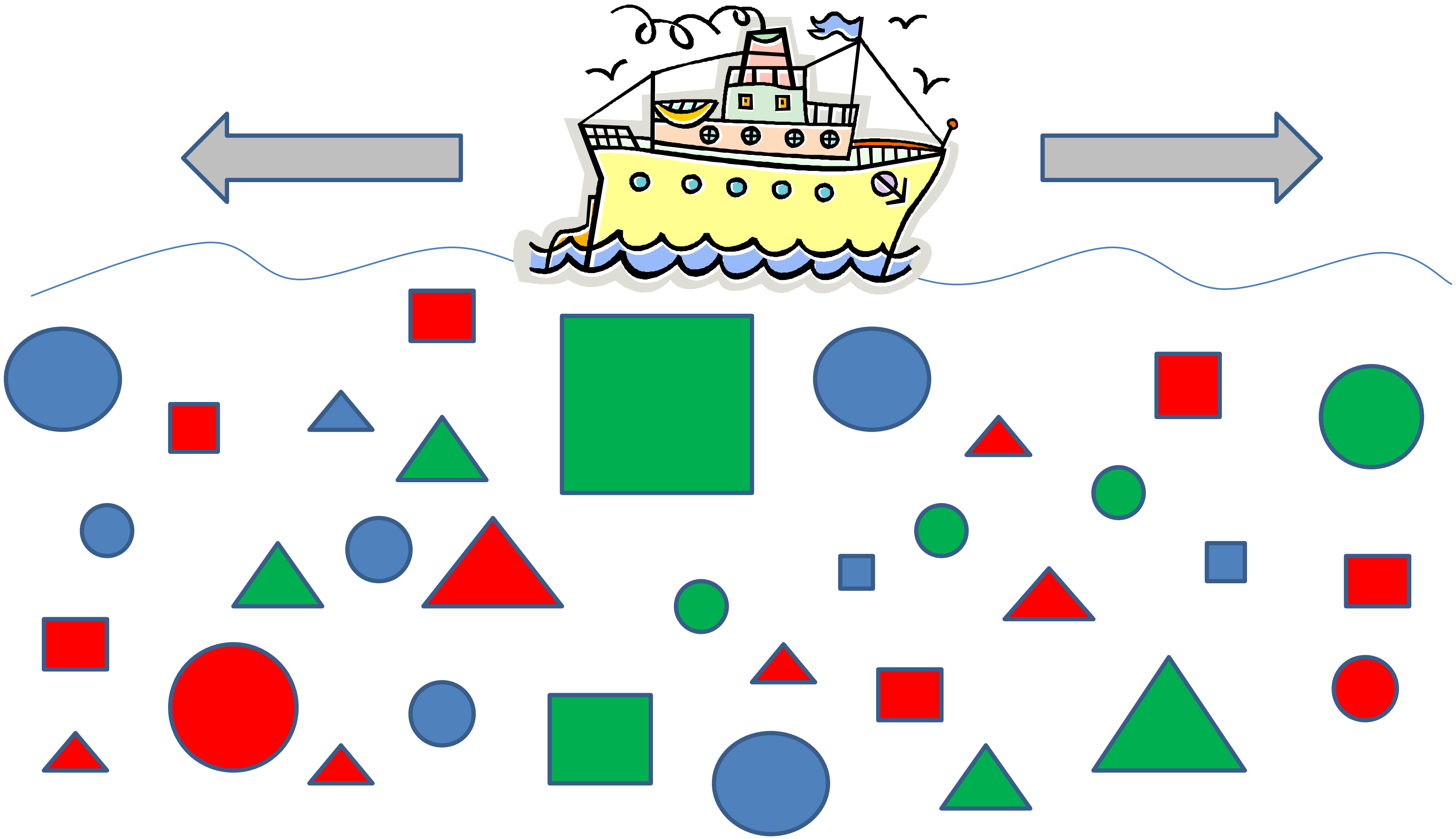
10. **Lineare Gleichungssysteme (12 Punkte):**
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\begin{vmatrix} 2x-3y=7 \\ 0{,}5x+5=-6y \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -x+2y+3z=7 \\ x+3y-3z=-2 \\ 2x-y+2z=5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0{,}75x+y=1 \\ 2x-10=y \end{vmatrix}$

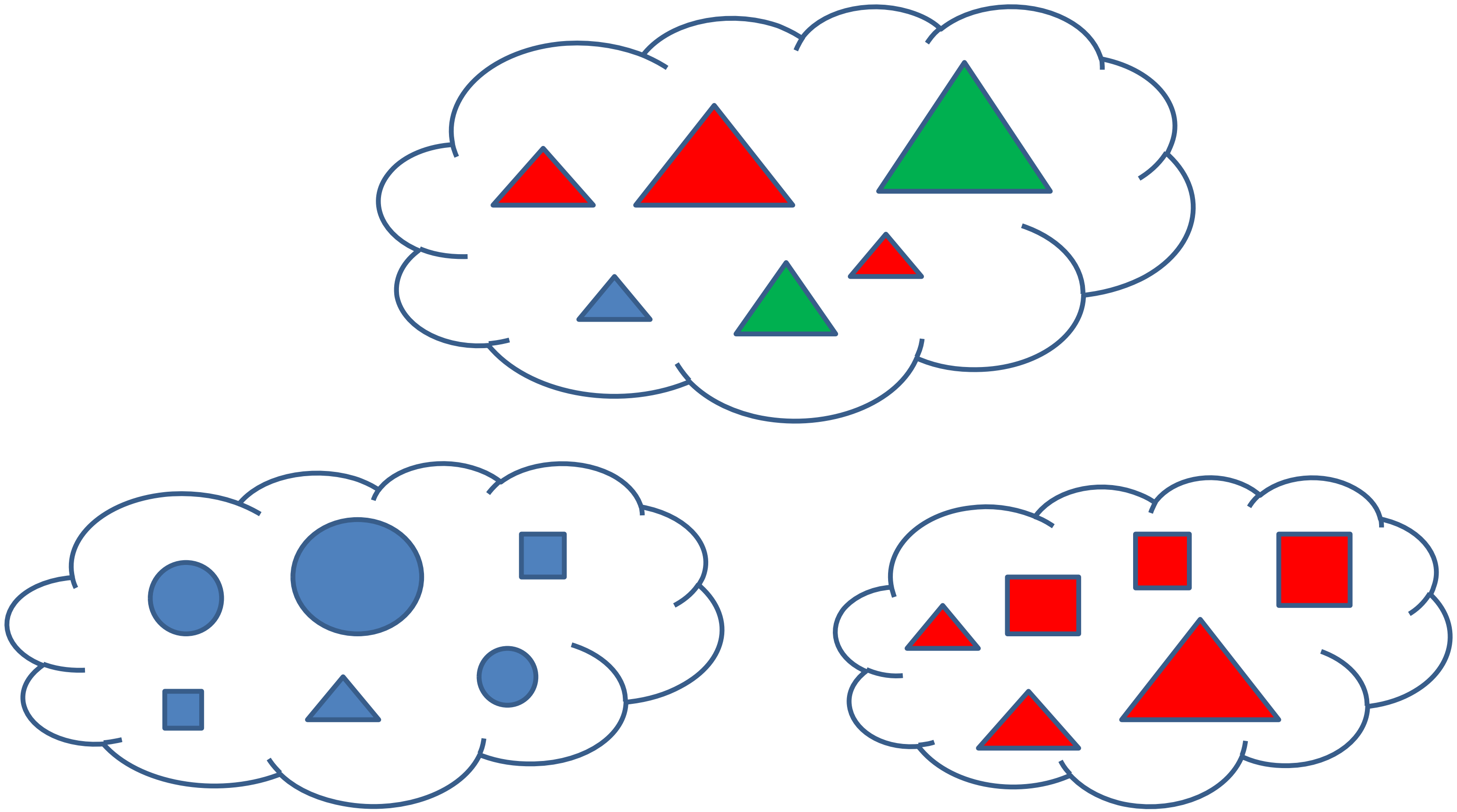
beliebig Gauß-Verfahren beliebig

11. **Trigonometrie (6 Punkte):**
Gegeben sei die Funktion mit $f(x) = -2{,}5\cdot sin\left(\frac{2}{3}x - 5{,}5\pi\right) + 3{,}5$.
Bestimmen und beweisen Sie die Periode, Symmetrie und Amplituden(Wertebereich) von $f(x)$.

URKNALL DER MATHEMATIK



GRUPPEN VON MENGEN



MENGENDEFINITION

{ Objekt}

{ Menge } **{ Element }** **{ }**

Reihenfolge spielt keine Rolle

Unterscheidbarkeit der Objekte (redundanzfrei)

OBJEKTFORMEN

Objekt	Beschreibung
$\{1,2\}$	
$(1;2)$	
$1,2$	
$\{\{1;2\}\}$	
$(1,2,1,2,1)$	
$\{(1;2)\}$	
$1;2$	
$[1;2[$	
$\{1,2;1;\{2\}\}$	
$\{(1,1,1);(2,2,2)\}$	

DARSTELLUNGSFORMEN I

1) Aufzählung:
   Die einzelnen Objekte werden innerhalb der Menge aufgeführt, wobei Platzhalter in Form von „...“ dargestellt werden.
2) Einschluss:
   Basierend auf einer beliebigen Ausgangsmenge wird ein Gesetz definiert, das die enthaltenden Objekte beschreibt.
3) Ausschluss:
   Aus einer Grundzahlenmenge werden die Objekte definiert, die nicht enthalten sein dürfen.

Beispiel: *Mengen der geraden, natürlichen Zahlen*

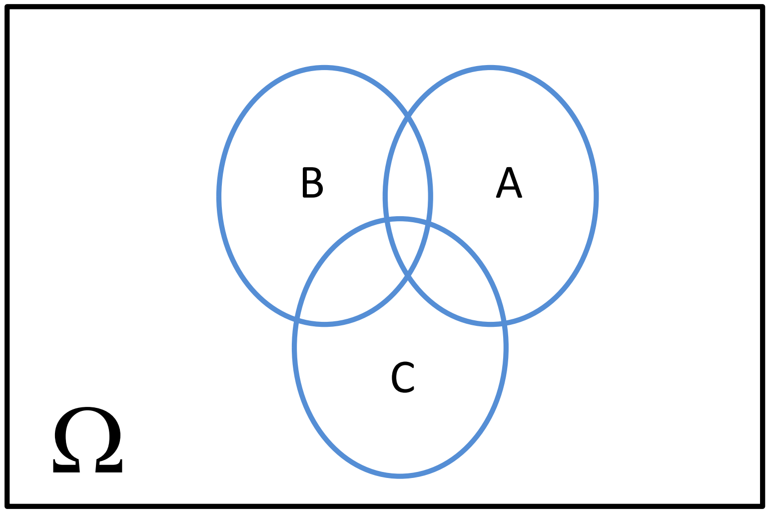
$1) G_{\mathrm{N}} = \{2; 4; 6; 8; \ldots\}$

$2) G_{\mathrm{N}} = \{x \in \mathbb{N} | x \bmod 2 = 0\}$

$3) G_{\mathrm{N}} = x \in \mathbb{N} \backslash \{x \in \mathbb{N} | x \bmod 2 <> 0\}$

DARSTELLUNGSFORMEN II

4) <u>Vennsches Diagramm</u>:
Es werden die existierenden Mengen mittels Kreise in die Welt (Kasten) eingetragen.



Die dadurch entstehenden Untermengen sind:

- Vereinigungsmenge (ODER-Verknüpfung)
- Schnittmenge (UND-Verknüpfung)

MODULO

Die Modulo-Funktion entspricht einem Restwertoperator, d.h. bei einer ganzzahligen Division wird der Rest als Ergebnis dargestellt.

$$X \bmod Y = R$$

Zähler Nenner (Divisor) Restwert

<u>Beispiel</u>:

$5 \bmod 2 = 1$, denn $5 \div 2 = 2$ Rest 1

$23 \bmod 5 = 3$, denn $23 \div 5 = 4$ Rest 3

<u>Teilbarkeit</u>: Restwert muss 0 ergeben

$x \bmod 7 = 0$ x ist teilbar durch 7

$x \bmod 2 <> 0$ x ist nicht durch 2 teilbar (ungerade Zahl)

AUFGABEN

Lösen Sie die folgenden Übungen, in dem Sie je einmal die Mengen via Aufzählung und einmal mittels Eigenschaften definieren.

1) Beschreiben Sie alle nicht durch sieben teilbaren natürlichen Zahlen.

2) Definieren Sie alle ganze Zahlen größer -10, die durch vier oder durch 5 teilbar sind.

3) Geben Sie alle positiven ganzen Zahlen kleiner gleich 100 an, die durch drei und durch fünf teilbar sind.

4) Nennen Sie alle Zahlen zwischen 4 und 42, die weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind.

5) Welche Zahlen größer als 42 sind durch 7 aber nicht durch 3 teilbar.

6) Bauen Sie die Beschreibung einer Menge zusammen, die aus einem zweidimensionalen Tupel natürlicher Zahlen besteht, wobei die erste Zahl um 2 kleiner als die zweite sein soll und geben Sie 4 Beispieltupel an.

   Skizzieren Sie den Graphen?

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

- Menge
- Element
- redundanzfrei
- Modulo
- Junktor
- Intervall
- Schnittmenge
- Relation
- Venn'sches Diagramm
- Einschluss
- Vereinigungsmenge
- Ausschluss
- Tupel

ALLES VERSTANDEN ?!?

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Welche Objekte können in einer Menge vorhanden sein?
- ✓ Was für Gesetze gelten bzgl. einer Menge?
- ✓ Was ist ein Junktor (Beispiel aus der Arithmetik)?
- ✓ Was ist ein Tupel?
- ✓ Was stellt eine runde Klammer eines Intervalls dar?
- ✓ Wie ist die Eigenschaftsdefinition einer Menge aufgebaut?
- ✓ Wie beschreibt man die Teilbarkeit von Zahlen?
- ✓ Was versteht man unter einer Relation?

TEILMENGE / INKLUSION

Sofern die Ausgangsmenge ein Teil oder komplett innerhalb einer weiteren Menge vorhanden ist, so spricht man von einer Teilmengenbeziehung bzw. von einer Inklusion.

Methodik:

1) Streichen der Mengenklammer bei der Ausgangsmenge

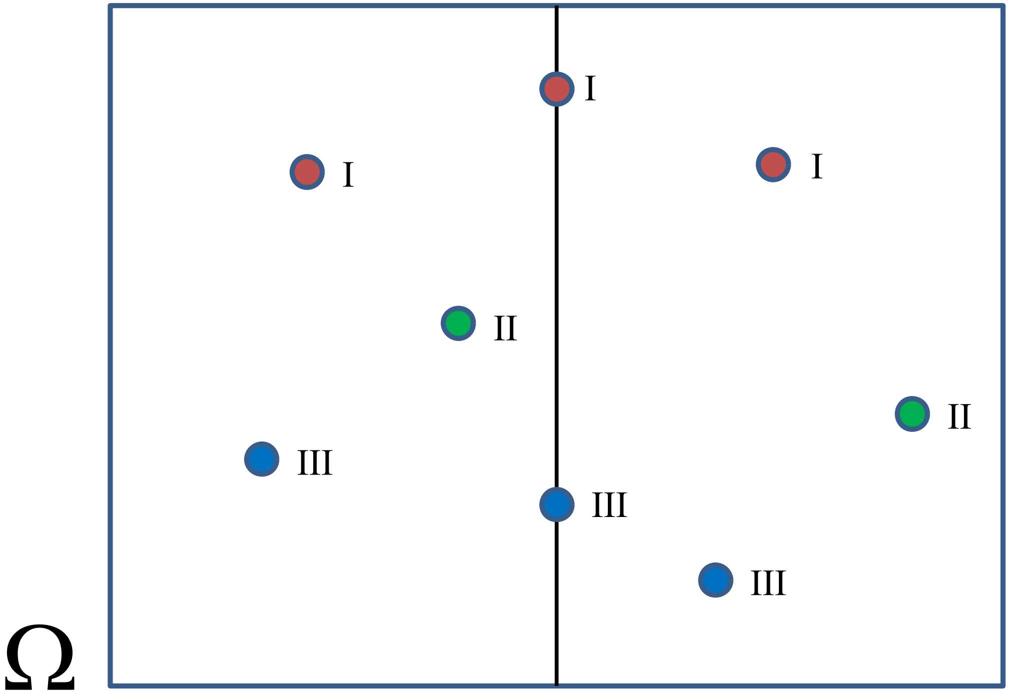
2) Jedes Objekt muss bzgl. Wert und Format in der 2. Menge auftauchen

$$\{a\} \subseteq Alphabet$$
$$\Downarrow$$
$$a \in Alphabet$$

Eigenschaften:

- ✓Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge $\{\ \} \subseteq A$
- ✓**reflexiv:** Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst $A \subseteq A$
- ✓**transitiv:** logische Schlussfolgerungen sind zugelassen $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$
- ✓**antisymmentrie:** Beweisprinzip der Extensionalität $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN



✓**Symmetrie (I):**
Zu jedem Punkt gehört ein Spiegelpunkt.

✓**Asymmetrie (I I):**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt.

✓**Antisymmetrie (I I I):**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt aber mindestens ein Punkt auf der Spiegelachse.

Sind mehrere Symmetrievarianten vorhanden, so kann keinerlei Aussage über das Symmetrieverhalten getroffen werden.

JUNKTOREN

Junktoren entsprechen Verbindungen / Operatoren die beliebige Objekte miteinander verknüpfen können (Artithmetik: „+“, „-“, „*“, „:“).

UND $(A \cap B)$:
Das Objekt der Lösung gehört gleichzeitig zu den Menge A und B. (*Durchschnitt*)
Beispiel: Primzahl $\cap$ gerade, natürliche Zahl $=\{2\}$

ODER $(A \cup B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A oder B oder zu A und B. (*Vereinigung*)
Beispiel: ungerade Zahl $\cup$ gerade, natürliche Zahl = $\mathbb{N}$

NICHT $(A \setminus B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A aber nicht zu B. (*Differenz*)
Beispiel: natürliche Zahl $\setminus$ gerade, natürliche Zahl = ungerade Zahl

AUFGABEN

1) Gegeben sei die Menge $A = \{42; \{x; y\}, \{\ \}\}$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

$a) x \in A$ $\quad b) \{x; y\} \subset A$ $\quad c) \{42\} \subset A$ $\quad d) \{42\} \in A$ $\quad e) 42 \in A$

$f) 42 \subset A$ $\quad g) \{\ \} \in A$ $\quad h) \{\ \} \subset A$ $\quad i) \{\{\ \}\} \subset A$ $\quad j) \{4\} \subset A$

2) Gegeben sind die Mengen der durch 5 teilbaren, ganzen Zahlen A und die Menge B mit {-10, -9, -8…8, 9, 10}.
Bestimmen Sie die Lösungen folgender Aussagen als Aufzählung und unter Verwendung der Eigenschaften bzgl. der ganzen Zahlenmenge:

a) $A \cap B$ $\quad$ b) $A \cup B$ $\quad$ c) A\B $\quad$ d) B\A

3) Gegeben sind die Menge A mit $A = \{-6; -4; -2; 0; 2; 6; 14; 16; 18; 20; 22; 26\}$ und die Menge B der ganzen Zahlen (größer gleich -10 und kleiner als 33), die durch 4 oder durch 10 teilbar sind.
Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ $\quad$ b) $A \cup B$ $\quad$ c) $A \setminus B$ $\quad$ d) $B \setminus A$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

- Inklusion
- Asymmetrie
- transitiv
- reflexiv
- Antisymmetrie
- $\cap$
- $\cup$
- Symmetrie
- $/$
- Primzahl
- Operator
- $\subset, \subseteq$
- $\in, \notin$

ALLES VERSTANDEN ?!?

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie können Sie effektiv eine Zahl mit 32 multipizieren?
- ✓ Was wird bei der Inklusion gesucht?
- ✓ Wann ist ein Ausdruck transitiv, wann reflexiv?
- ✓ Welche Symmetriearten kennen Sie?
- ✓ Wie beweisen Sie, dass zwei Mengen identisch sind?
- ✓ Welche Objekte werden durch die ODER-Verbindung gesucht?
- ✓ Warum ist die UND-Verbindung für die Negation wichtig?
- ✓ Wie schließen Sie eine Zahl aus einer Menge aus?

ZAHLENMENGEN

$\mathbb{N} \rightarrow$	Natürliche Zahlen	$\{1; 2; 3 \ldots\}$
$\mathbb{Z} \rightarrow$	Ganze Zahlen	$\{\ldots -2; -1; 0; 1; 2 \ldots\}$
$\mathbb{Q} \rightarrow$	Rationale Zahlen	$\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
		Endliche Nachkommastellen, Periode
$\mathbb{R} \rightarrow$	Reelle Zahlen	$\{\pi; e; \sqrt{2}; \ldots\}$
		Unendliche Nachkommastellen
$\mathbb{C} \rightarrow$	Komplexe Zahlen	$z = a + b \cdot i \wedge i = \sqrt{-1}$

KARTESISCHES PRODUKT

Das kartesische Produkt wird mittels Kreuzprodukt aus beliebigen Mengen gebildet, wobei jedes Objekt der linken Menge mit jedem weitern Objekt übrigen Mengen kombiniert wird.

Als Ergebnis entsteht ein n-dimensionales Tupel $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Die entstehende geordnete Punktmenge ist **nicht kommutativ**.

Der Euklidische Vektorraum lässt sich als kartesische Produkt somit wie folgt darstellen: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = (x_1, x_2, x_3)$

<u>Beispiel:</u> $A = \{a; b; c\}$ $\quad B = \{1; 2;\}$

$$AxB = \{(a,1); (a,2); (b,1); (b,2); (c,1); (c,2);\}$$

$$BxA = \{(1,a); (1,b); (1,c); (2,a); (2,b); (2,c);\}$$

GESETZE / ZUSAMMENHÄNGE

Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan:	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Komplement:	$\overline{A} \cap A = \{\ \}$	$\overline{A} \cup A = \Omega$
Absorption:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

<u>Zusammenhänge</u> zwischen $A; \{\ \}; \Omega$

$\cap :\quad A \cap A = A \qquad A \cap \Omega = A \qquad A \cap \{\ \} = \{\ \}$

$\cup :\quad A \cup A = A \qquad A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cup \{\ \} = A$

Neutrales Objekt: $A \cap \Omega = A \qquad A \cup \{\ \} = A$

AUFGABEN

Beweisen Sie die folgenden Ausdrücke unter Benennung aller angewandten Gesetze

1) Das Absorptionsgesetz $A \cap \left(A \cup B\right) = A$

2) Veranschaulichen Sie das De Morgangesetz $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ in einem Vennschen Diagramm

3) Vereinfachen Sie die Robbinsgleichung: $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup \overline{B}}}$

KLASSENEINTEILUNG / ZERLEGUNG

Man spricht von einer Klasseneinteilung, sofern sicher gestellt werden kann, dass jedem Objekt aus der definierten Welt einer Klasse (Untermenge) zugeordnet werden kann.

UND-Verknüpfung:
Die UND-Verbindung zwischen jeder Klasse muss jeweils die leer Menge als Lösung haben. Man spricht dann von disjunkten Mengen.

ODER-Verknüpfung:
Die ODER-Verbindung zwischen allen Klassen muss zu einer Menge führen, die alle Objekte der definierten Ausgangsmenge enthält.

Beispiel:	*Alphabet*
UND-Verknüpfung:	$Konsonat \cap Vokal = \{\ \}$
ODER-Verknüpfung:	$Konsonat \cup Vokal = Alphabet$

POTENZMENGE

Eine Potenzmenge ist eine Ansammlung von allen möglichen Teilmenge basierend auf einer beliebigen Menge A.

Da jedes Objekt der Ausgangsmenge zwei Möglichkeiten besitzt, nämlich zu der Teilmenge zu gehören oder nicht, besteht jede Potenzmenge aus 2^n Untermengen.

Die Teilmengen existieren von der Länge Null (leere Menge) bis zu der Länge *n* (Anzahl der Objekte in der Ausgangsmenge).

<u>Beispiel:</u> $A = \{a; b; c; d\}$

$$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \{\ \}; \\ \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \\ \{a;b\}; \{a;c\}; \{a;d\}; \{b;c\}; \{b;d\}; \{c;d\}; \\ \{a;b;c\}; \{a;b;d\}; \{a;c;d\}; \{b;c;d\}; \\ \{a;b;c;d\} \end{array} \right\} \quad 2^n = 2^4 = 16 \text{ Untermengen}$$

AUFGABEN

1) Welche der folgenden Aussagen über eine Potenzmenge $P(A)$ und einer Menge *A* sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

$a)\, A \in P(A)$ $\quad b)\, A \subset P(A)$ $\quad c)\, \{\ \} \in P(A)$ $\quad d)\, \{\ \} \subset P(A)$

$e)\, \{A\} \in P(A)$ $\quad f)\, \{A\} \subset P(A)$ $\quad g)\, \{\{\ \}\} \subset P(A)$ $\quad h)\, \{\{\ \}\} \in P(A)$

2) Bilden Sie die Potenzmenge basierend auf der Menge $A = \{\nabla; \infty; \pi\}$.

3) Gegeben sind die Menge A der natürlichen Zahlen (größer 7 und kleiner gleich 22), die durch 2 oder 3 oder durch 5 teilbar sind und die Menge B der nicht durch zwei teilbare Zahlen im Intervall von $]6; 24]$.
Bestimmen Sie die Lösungen (2-mal Aufzählung und 2-mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ $\quad$ b) $A \cup B$ $\quad$ c) $A \backslash B$ $\quad$ d) $B \backslash A$

4) Definieren Sie die natürlichen Zahlen größer gleich vier und kleiner 50, die durch 4 und durch 7 teilbar sind.

5) Gegeben sei die Menge M aller Studierenden an der Hochschule Fulda in Form der Matrikelnummer. Gesucht ist die Menge der Studierenden, wo die Quersumme der Matrikelnummer größer 15 ist.

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Potenzmenge

Kartesisches Produkt

disjunkt

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Euklidischer Vektorraum

Klassen

assoziativ

invers

Absorption

neutral

kommutativ

idempotent

distributiv

imaginär

De Morgan

ALLES VERSTANDEN ?!?

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

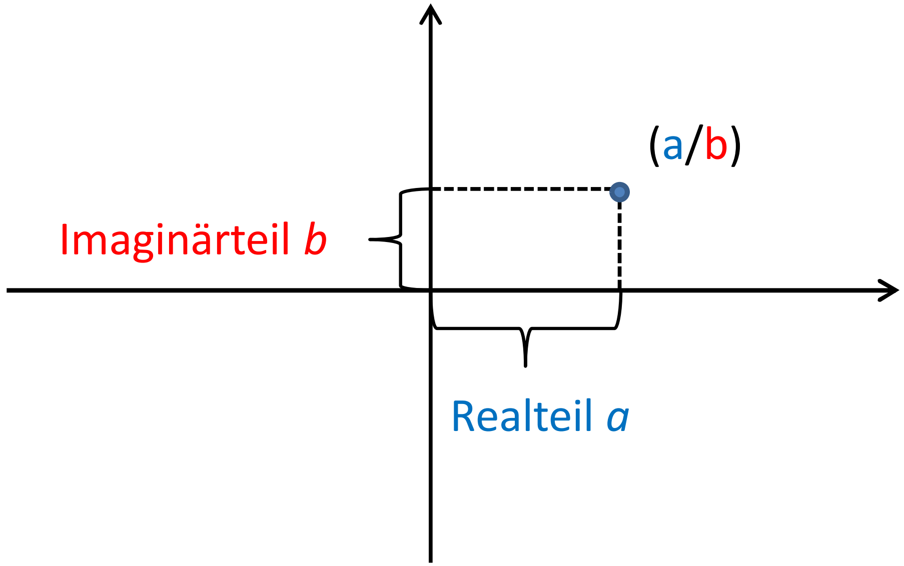
- ✓ Zu welchen Zahlenmengen gehört jeder Bruch?
- ✓ Warum benötigt man die imaginäre Achse?
- ✓ Warum ist das kartesische Produkt nicht kommutativ?
- ✓ Wie macht man eine als Relation definierte Funktion umkehrbar?
- ✓ Wie entsteht der Euklidische Vektorraum?
- ✓ Welche Gesetze gibt es in der Arithmetik?
- ✓ Wie überprüft man eine Klasseneinteilung einer Menge A?
- ✓ Was versteht man unter einer Potenzmenge?

KOMPLEXE ZAHLEN I

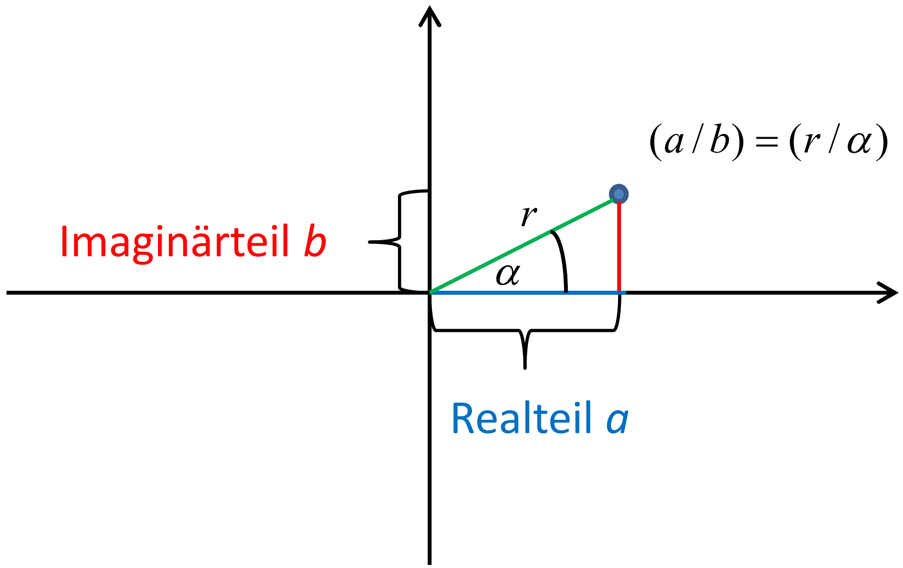
Jacques Hadamard (1865–1963)

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Aussagen über reelle Zahlen führt über komplexe Zahlen.

$$z = \underbrace{a}_{\text{Realteil}} + \underbrace{b}_{\text{Imaginärteil}} \cdot i; i = \sqrt{-1}$$



KOMPLEXE ZAHLEN II



a = Ankathete

b = Gegenkathete

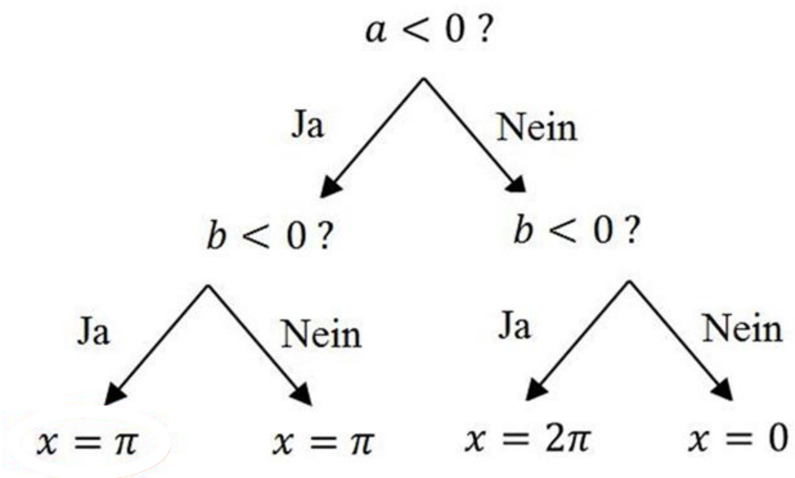
r = Hypothenuse

Betrag: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument: $\alpha = \arctan\frac{b}{a} + x \quad \begin{cases} a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow x = 0\pi \\ a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow x = 2\pi \\ a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow x = \pi \\ a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$

KOMPLEXE ZAHLEN III

Entscheidungsbaum für das Argument von $z = a + b \cdot i$



<u>Anmerkung</u>:
Wenn die komplexe Zahl direkt auf einer Achse liegt, also eine der Koordinaten null ist, müssen Sie für das Argument immer ein Vielfaches von 90° nutzen.

KOMPLEXE ZAHLEN III

Potenzen des Imaginärteils i^{EXP}:

$$i^{0+4\cdot n} = i^0 \cdot i^{4\cdot n} = 1 \cdot \left(i^4\right)^n = 1 \cdot 1^n = 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 0$$

$$i^{1+4\cdot n} = i^1 \cdot i^{4\cdot n} = i \cdot \left(i^4\right)^n = i \cdot 1^n = i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 1$$

$$i^{2+4\cdot n} = i^2 \cdot i^{4\cdot n} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \cdot \left(i^4\right)^n = (-1) \cdot 1^n = -1 \cdot 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 2$$

$$i^{3+4\cdot n} = i^3 \cdot i^{4\cdot n} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \cdot i \cdot \left(i^4\right)^n = (-i) \cdot 1^n = -i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 3$$

<u>Beispiel:</u>

$$(3+2i) + (7-5i) = (3+7) + (2-5)i = 10 - 3i$$

$$(3+2i) \cdot (7-5i) = (3 \cdot 7) + (3 \cdot (-5i)) + (2i \cdot 7) + (2i \cdot (-5i)) = 21 - 15i + 14i - 10i^2 = 31 - i$$

$$2i^3 \cdot (3+2i)^2 = -2i \cdot (9 + 12i + 4i^2) = -2i \cdot (5 + 12i) = 24 - 10i$$

KOMPLEXE ZAHLEN IV

Darstellung einer komplexen Zahl:

✓Kartesische Darstellung: $z = a + b \cdot i$

✓Trigonometrische Darstellung: $z = r \cdot \left(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)\right)$

✓Exponentielle Darstellung: $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$

Beispiel: $z = 3 - 4 \cdot i$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 360 \approx 307° \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 5 \cdot \left(\cos(307) + i \cdot \sin(307)\right) \\ z = 5 \cdot e^{i \cdot 307} \end{array}$$

KOMPLEXE ZAHLEN V

Die konjugiert komplexe Zahl:

Um den Imaginärteil einer komplexen Zahl zu beseitigen , wird mittels des 3. Binoms der Ausdruck erweitert (konjugiert komplexen Zahl).

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$$

Betrag: $z = 2 - 5i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 5i$

$$r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(2 - 5i) \cdot (2 + 5i)} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Division: $\frac{9 - 2i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{27 - 6i - 9i + 2i^2}{3^2 - i^2} = \frac{25 - 15i}{10} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} i = 2{,}5 - 1{,}5i$

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels kartesischer Form an. Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

1) $(1-2i)^3 \cdot [(3-i)\cdot(2i+6)\cdot i]$

2) $\dfrac{3+2i}{4-i}+\dfrac{-12-3i}{2i-3}$

3) $(2+3i)^2 \cdot 2(1-2i)^2 \cdot i^{13}$

KOMPLEXE ZAHLEN VI

Die Potenz einer komplexe Zahl:

Kartesische Form: $(a + bi)^n = (a + bi) \cdot (a + bi) \cdot \cdots \cdot (a + bi)$

Berechnung via Binom oder Pascal'sche Dreieck

Trigonometrische Form: $\left[r \cdot \left(cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha)\right)\right]^n$

Berechnung mittels der Formel von de Moivre

$r^n \cdot \left(cos(n \cdot \alpha) + i \cdot sin(n \cdot \alpha)\right)$

Exponentielle Form: $\left[r \cdot e^{i \cdot \alpha}\right]^n$

Berechnung mittels der Potenzgesetze

$\Rightarrow r^n \cdot \left(e^{i \cdot \alpha}\right)^n = r^n \cdot e^{n \cdot (i \cdot \alpha)}$

KOMPLEXE ZAHLEN VII

Beispiel: $z^3 = (3-4i)^3,\ r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,\ \alpha = arc\ tan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi \approx 307°$

Kartesische Form:

$$(3-4i)^3 = (3-4i)^2 \cdot (3-4i)$$
$$(-7-24i) \cdot (3-4i)$$
$$-21 + 28i - 72i + 96i^2 = -117 - 44i$$

Trigonometrische Form:

$$[5 \cdot (cos(307°) + i \cdot sin(307°))]^3$$
$$5^3 \cdot (cos(3 \cdot 307°) + i \cdot sin(3 \cdot 307°))$$
$$125 \cdot (cos(201°) + i \cdot sin(201))$$

Exponentielle Form:

$$[5 \cdot e^{i \cdot 307°}]^3$$
$$5^3 \cdot \left(e^{i \cdot 307°}\right)^3 = 125 \cdot e^{3 \cdot (307° \cdot i)} = 125 \cdot e^{921 \cdot i}$$

KOMPLEXE ZAHLEN VIII

Die Wurzel einer komplexe Zahl:

Während es beim Potenzieren einer komplexen Zahl nur eine Lösung gibt, entstehen beim Ziehen der n-ten Wurzel stets n-1 Lösungen.

Moivre'sche Formel: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[cos\left(\frac{\alpha+2k\cdot\pi}{n}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\alpha+2k\cdot\pi}{n}\right)\right]$

$k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$

Sobald $k = n$ gilt wiederholen sich die Lösungen

Beispiel: $z^4 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$ mit $r = 1$ *und* $\alpha = \pi$

$$k = 0:\ z_o = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$k = 1:\ z_1 = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)\right]$$

$$k = 2:\ z_2 = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)\right]$$

$$k = 3:\ z_3 = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)\right]$$

KOMPLEXE ZAHLEN IX

Die Wurzel einer komplexe Zahl:

Während es beim Potenzieren einer komplexen Zahl nur eine Lösung gibt, entstehen beim Ziehen der n-ten Wurzel stets n-1 Lösungen.

Polarform:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot e^{i\cdot(\alpha+2k\cdot\pi)}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\alpha+2k\cdot\pi}{n}}$$

$k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$

Sobald $k = n$ gilt wiederholen sich die Lösungen

Beispiel:

$$z^4 = -1 \;\Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} \text{ mit } r = 1 \; und \, \alpha = \pi$$

$$k = 0:\; z_o = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$$

$$k = 1:\; z_1 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$$

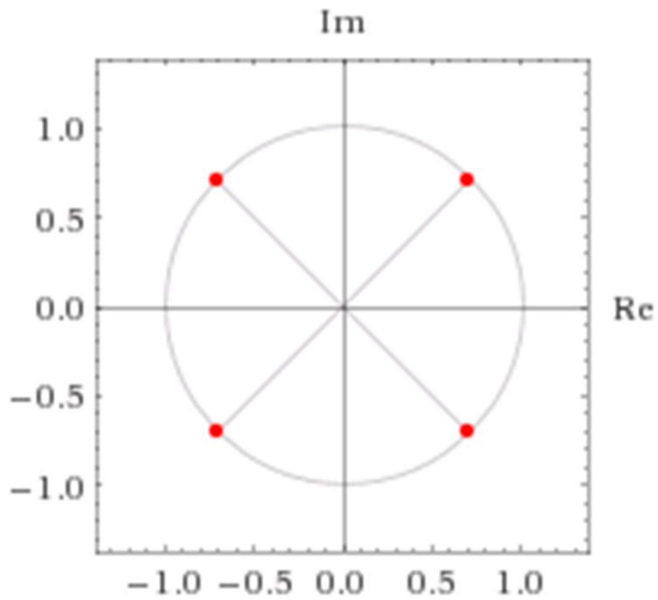
$$k = 2:\; z_2 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}$$

$$k = 3:\; z_3 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}$$

KOMPLEXE ZAHLEN X

Grafische Darstellung der Lösung zu $z^4 = -1$:

- Aufgrund des imaginären Raums, entspricht die Anzahl der Lösungen dem Grad der zu ziehenden Wurzel.



- Grafisch entsteht bei der Verbindung der Lösungspunkte ein Kreis, wobei der Radius identisch mit dem Betrag der komplexen ist.

AUFGABEN I

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels exponentieller und trigonometrischer Form an.

Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

1. $\left(2i - \sqrt{3}\right)^4 \cdot (4 + 0{,}5i)^3$

2. $z^5 = 32i$

3. Bestimmen Sie die kartesische Form zu
   $z = 16 \cdot \left(cos(150°) + i \cdot sin(150°)\right)$
   auf zwei Arten.

DEG	0°	30°	45°	60°	90°
RAD	0π	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
SIN	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
COS	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
TAN	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

AUFGABEN II

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung als $z = a + bi$ an.

1) $(2i - 5) \cdot [(3i + 4) - 2 \cdot (i - 4)]$

2) $4 \cdot (i - 3) \cdot (3 + 1) - (i - 2) \cdot (5 + i)$

3) $4i^8 \ \cdot (4i - 2i^{11}) \cdot [(i^3 + 2i) \cdot (4i + 1)]$

4) $15i^{11} - 3i \cdot (2i^7 + 2i^8) + 6i \cdot (2i - 5i^{15} + 3i^6)$

5) $\dfrac{3-2i}{i-1} - \dfrac{3i+4}{1-2i} - \dfrac{3i+19}{10}$

6) $(-5i^{32} + 4i^{17})^3 - (4i^{19} + i^{46})^4$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

arcus

Argument

Imaginärteil

Betrag

kartesische Darstellung

Realteil

trigonometrische Darstellung

Erweiterung 3. Binom

exponentielle Darstellung

$EXP \; mod \; 4 = ?$

Eine handvoll S von Schreiber

ALLES VERSTANDEN ?!?

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wofür benötigt man eine imaginäre Achse?
- ✓ Wie wird eine komplexe Zahl definiert?
- ✓ Was versteht man unter dem Betrag / Argument?
- ✓ Worauf muss bei der Berechnung des Winkels geachtet werden?
- ✓ Was hat die Modulo-Operation mit den komplexen Zahlen zu tun?
- ✓ Welche Winkel haben komplexe Zahlen auf den Achsen?
- ✓ Welche Darstellungsformen hat eine komplexe Zahl?
- ✓ Auf welche Arten werden komplexe Zahlen dividiert?