VORKURS

27.09.2021

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann spricht man von einer Exponentialfunktion?
- ✓ Was sagt Ihnen der Wachstumsfaktor?
- ✓ Was bedeutet Halbwertszeit?
- ✓ Was können Sie durch die Art des Logarithmus erkennen?
- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen LOG und LN?
- ✓ Wie lautet der Definitionsbereich von Log(x-1)?
- ✓ Wie lautet die Umkehrfunktion von LD(x)?
- ✓ Aus welchen 3 Schritten besteht das Lösen von Log-Ausdrücken?

AUFGABEN

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $5 \cdot \log(2x) + 4 \cdot \log(\sqrt{0{,}5x}) - 0{,}5 \cdot \log(16x^4) - 2 \cdot \log(0{,}25)$

2) $2 \cdot \ln(3a^2) - 6 \cdot \ln(\sqrt[3]{2a^4}) + \frac{1}{3} \cdot \ln(27(a^2)^6) - 4 \cdot \ln\left(\frac{2}{a}\right)$

3) Ein Kapital von 2000 EURO auf einer Bank eingezahlt. Die Verzinsung erfolgt alle vier Monate mit einem Zinssatz von 2%.
   a) Wie hoch ist der Kontostand nach den 10 Jahren?
   b) Wie hoch wäre der Zinssatz bei einer jährlichen Verzinsung?
   c) Wie lange lag das Geld auf der Bank bei einem Endbetrag von 2.691,74 EURO?

4) Ein Gartenteich verliert aufgrund eines kleines Lochs Wasser, wodurch er wöchentlich 5% Inhalt verliert.
   Nach 4 Wochen sind es noch 34.209,2625 Liter vorhanden.
   a) Bestimmen Sie den Startwert der Untersuchung in m³.
   b) Wieviel cm³ sind nach einem Jahr noch vorhanden?
   c) Nach wie vielen Tagen sind weniger als 50% in dem Teich?

WACHSTUM & ZERFALL I

Handelt es sich um einen Vorgang, wodurch sich ein Grundwert kontinuierlich um einen bestimmten Prozentsatz erhöht bzw. reduziert, so existiert eine Exponentialfunktion

Der Wachstumsfaktor errechnet sich durch: $q = 1 \pm p$

Beispiel:
- Ein Kapital erhöht sich um 5%: $q = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$
- Ein Pool verliert 3% seines Inhalts: $q = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

Ist der Wachstumsfaktor $\mathrm{q} > 1$, dann handelt es sich um eine Wachstumsfunktion.
Für $0 < \mathrm{q} < 1$ eine Zerfallsfunktion.

Somit erhalten wir die allgemeine Wachstums- / Zerfallsfunktion:

$$\boxed{A(x) = A(0) \cdot q^x}$$

Hier entspricht $A(0)$ dem Startwert zum Zeitpunkt Null und x für die Zeitperioden.

BEISPIEL

1. Ein Kapital von 10.000€ wird mit 5% jährlich verzinst.

   Auf welchen Wert ist der Betrag nach 10 Jahren angestiegen?

   $A(0) = 10.000€$ $\quad A(x) = 10.000€ \cdot 1{,}05^x$

   $q = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

   $x = 10$ $\quad A(10) = 10.000€ \cdot 1{,}05^{10} = 16.288{,}95€$

2. Ein Pool verliert aufgrund eines Lochs pro Tag 3% seines Wasserinhalts.
   Zu Beginn der Untersuchung befanden sich 50m³.

   Wie viel Liter sind nach 6 Wochen noch vorhanden

   $A(0) = 50m^3$ $\quad A(x) = 50m^3 \cdot 0{,}97^x$

   $q = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

   $x = 6 \cdot 7 = 42$ $\quad A(42) = 50m^3 \cdot 0{,}97^{42} = 13{,}91m^3 = 13.911l$

WACHSTUM & ZERFALL II

Stimmt die Periode mit der Zeitvariable nicht überein, d.h. handelt es sich z.B. um eine unterjährige Verzinsung oder um eine Halbwertszeit, so muss die Variable x so angepasst werden.

Ein Kapital wird vierteljährlich mit 5% verzinst, wobei die Einheit von x Jahre ist.

$A(x) = A(0) \cdot 1{,}05^{4 \cdot x}$ *In einem Jahr tritt 4 mal die Verzinsung ein*

Die Halbwertszeit eines radioaktiven Stoffs beträgt 500 Jahre (x=Jahre).

$A(x) = A(0) \cdot 0{,}5^{\frac{1}{500} \cdot x}$ *Erst nach 500 Jahren halbiert sich die Menge*

AUFGABEN

1) Ein Kapital von 5000 EURO wird bei einer halbjährlichen Verzinsung zu 4% sieben Jahre lang auf einer Bank angelegt.

   a) Wie hoch ist der Kontostand nach den 10 Jahren?
   b) Wie hoch wäre der Zinssatz bei einer jährlichen Verzinsung?
   c) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion und skizzieren den Graphen.

2) Im Herbst reduziert sich die Menge an Blättern eines Baumes im Durchschnitt täglich um 4%.
   Zu Beginn der Untersuchung am 1. September befanden sich 10^9 Blätter an einer Buche.

   a) Wie viel Blätter sind am 01.12. noch vorhanden?
   b) Nach wie vielen Tagen sind weniger als 50% in dem Teich?
   c) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion und skizzieren den Graphen.

OPERATION UND GEGENOPERATION

Die zu einem Logarithmusausdruck zugehörige Gegenoperation ist stets ein Exponentialoperator, wodurch sich beide neutralisieren.
Die Zusammenhänge ergeben sich wie folgt:

$$\boxed{\log 10^{\Psi} = 10^{\log \Psi} = \Psi} \quad \boxed{\ln e^{\Omega} = e^{\ln \Omega} = \Omega} \quad \boxed{ld\, 2^{\Theta} = 2^{ld\,\Theta} = \Theta}$$

Aufgrund dieser Vereinfachungen, muss die zugehörige Basis bzw. der Exponent im ersten Schritt mittels exponentieller/ logarithmischer Gesetze passend umgeformt werden.

Beispiel:

$$\log \frac{1}{1000} - 4 \cdot \ln \sqrt{e} + \frac{1}{2} \cdot ld\,16 + 0{,}1^{\log 0{,}25} + \left(\frac{1}{e^2}\right)^{\ln \frac{1}{3}} - 8^{ld\,3}$$

$$\log 10^{-3} - 4 \cdot \ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot ld\,2^4 + 10^{(-1)\cdot \log \frac{1}{4}} + e^{(-2)\cdot \ln \frac{1}{3}} - 2^{3 \cdot ld\,3}$$

$$-3 - 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 3^3 = -3 - 2 + 2 + 4 + 9 - 27 = -17$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $$\log\frac{1}{100}-\sqrt{e}^{\ln 4}+4^{ld\,3}-2ld\,0{,}25$$

2) $$100^{\log 3}-\ln\frac{1}{e^2}+0{,}5ld16-e^{-3\ln\frac{1}{2}}$$

3) $$\left(\frac{1}{8}\right)^{ld\,2}-6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}+\frac{1}{4}ld\,64-\frac{1}{2}\log\frac{1}{1000}+\sqrt[3]{e}^{\ln 27}$$

4) $$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\ln\frac{1}{9}}+100^{\log\frac{1}{2^{-2}}}-16^{\frac{1}{2}ld\,4}+2\log 0{,}001-3\ln\frac{1}{e^3}+\frac{1}{4}ld\,\frac{1}{256}$$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Wachstumsfunktion

Zerfallsfunktion

Halbwertszeit

reduzierter Prozentsatz

vermehrter Prozentsatz

unterjährige Verzinsung

Operation / Gegenoperation

Basistransformation