VORKURS

21.09.2021

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann spricht man von einem Grenzwert?
- ✓ Was bedeutet Konvergenz?
- ✓ Worauf ist bei der Division durch „Null“ zu achten?
- ✓ Was ist eine behebbare Lücke?
- ✓ Wie verläuft eine stetige Funktion?
- ✓ Was ist in der Mathematik nicht erlaubt?
- ✓ Was ist der Grenzwert bei einer waagerechten Asymptote?
- ✓ Wie erzeugt man den Annäherungsgraphen einer diagonalen Asymptote?

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie den Definitions- sowie den Wertebereich sowie die Achsenschnittpunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

a) $f(x) = 3 + \frac{2}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{5}{8-4x} + 5$

II. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

1) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{2x^3 - 2x^2 - 16x + 24}$ 2) $f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 2x + 40}{x^2 - x - 12}$

POLYNOMDIVISION I

So funktioniert die herkömmliche Division

```
  1 7 3 6 : 1 4  = 1 2 4
- 1 4
  ---
    3 3 6
  - 2 8
    ---
      5 6
    - 5 6
      ---
        0
```

Gesucht werden die Nullstellen folgender Gleichung $x^3 + 3x^2 - 16x + 12 = 0$

Weil die konstante Zahl 12 vorhanden ist, erhalten Sie als Menge möglicher Teiler:

$$M_{12} = \{\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12\}$$

Für $x = 1$ erhalten Sie $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 12 = 0$ also einen Treffer, so dass Sie durch $(x - 1)$ - Linearfaktor - dividieren können.

POLYNOMDIVISION II

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 16x + 12) : (x-1) = x^2 + 4x - 12 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad 4x^2 - 16x + 12 \\
\qquad \underline{-(4x^2 - 4x)} \\
\qquad\qquad -12x + 12 \\
\qquad\qquad \underline{-(-12x + 12)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Das Ergebnis der Division ist wieder eine quadratische Gleichung, die Sie auch wieder mit dem Satz von Vieta lösen: $x^2 + 4x - 12 = (x+6) \cdot (x-2)$

Die anfängliche Gleichung lässt sich somit auch in ihre Linearfaktoren zerlegen und wir erhalten:

$$x^3 + 3x^2 - 16x + 12 = (x+6) \cdot (x-2) \cdot (x-1) = 0$$

Als Lösung erhalten Sie die Nullstellen der einzelnen Linearfaktoren, $\mathbb{L} = \{-6; 1; 2\}$

1)

Aritlımetik:

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $-a+(3-(b+5-(c-2+(a+b))))-(c-4)$

b) $(2y+\frac{1}{2}x)(x-4y)-8(\frac{1}{4}x+y)^2$

2)

$(2a^2-5ab+10ac+2b^2+12c^2-11bc):(a-2b+3c)$

$(8x^2y^2-14xy^2-6xyz+3y^2-3xy^2z+9yz+2x^2y^2z):(2xy-3y)$

3)

$x^3-2x^2-5x+6=0$

$x^4-x^3-7x^2+x+6=0$

$2x^3-22x=8x^2-60$

$x^4+3x^3-13x^2-27x+36=0$

BRUCHRECHNUNG I

KgV: Kleinste gemeinsame Vielfache

Hier versucht man durch Primfaktorenzerlegung eine Zahl zu finden, die durch die gegebenen Zahlen teilbar sind.

Dies benötigen Sie um Brüche **gleichnamig** zu machen.

$$\frac{5}{56} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{5 \cdot (3 \cdot 5)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{75}{840}$$

$$\frac{11}{60} = \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{11 \cdot (2 \cdot 7)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{154}{840}$$

ggT: größter gemeinsamer Teiler:

Auch hier wird durch die Primzahlen eine Zahl gesucht. Nur diesmal müssen die gegebenen Zahlen durch das Produkt daraus teilbar sein.

Diese Methode wenden wir beim **Kürzen** an.

$$\frac{660}{1848} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$$

BRUCHRECHNUNG II

Hauptnenner:
Damit Brüche addiert bzw. subtrahiert werden können, müssen diese im ersten Schritt auf den gleichen Nenner (Hauptnenner) gebracht werden, um abschließend die Zähler zusammen zu fassen.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{8}=\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{12}{12}-\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{3}=\frac{16+36-15}{24}=\frac{37}{24}$$

Doppelbruch:
Bei einem Doppelbruch handelt es sich im Grunde genommen um eine Division von zwei Bruchtermen. Zur Berechnung werden der Zähler / Nenner im ersten Schritt in einen reinen Bruch umgewandelt und abschließend wird der Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert.

$$\frac{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}+\frac{4}{6}}=\frac{\frac{12-10}{15}}{\frac{2+12}{18}}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{14}{18}}=\frac{2}{15}\cdot\frac{18}{14}=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 2\cdot 7}=\frac{6}{35}$$

BRUCHRECHNUNG III

Eine rationale, endliche Zahl wird in einen Bruch verwandelt, in dem man den Teil hinter dem Komma als separaten Bruch darstellt und diesen dann mit dem ganzen Teil der Zahl addiert.

$$8{,}375 = 8 + 0{,}375 = 8 + \frac{375}{1000} = 8 + \frac{3}{8} = 8\frac{3}{8} = \frac{67}{8}$$

Handelt es sich um eine periodische Zahl, so wird die Zahl vor der Periode getrennt und diese dann in einen Bruch verwandelt und mit dem Rest der Zahl addiert.

$$4{,}166666666\ldots = 4{,}1\overline{6} = 4{,}1 + 0{,}0\overline{6} = \frac{41}{10} + \frac{6}{90} = \frac{125}{30}$$

Kürzen Sie die Brüche soweit als möglich und geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an?

$\frac{48}{1188}$ b) $\frac{312}{54}$ c) $\frac{1688}{792}$

Wandeln Sie die gegebenen Dezimalzahlen in einen Bruch um und Kürzen diesen wenn möglich.

$2{,}0\overline{5}$ b) $8{,}0\overline{12}$ c) $1{,}625$

Bestimmen Sie das Ergebnis der Aufgaben, in dem Sie die Brüche erweitern und zusammenfassen.

$$\frac{2}{5}-\frac{5}{3}+\frac{7}{2}+2 \qquad \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{5}\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right) \qquad \left(\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\right)\div\left(3+\frac{7}{4}\right)$$

Fassen Sie den Doppelbruch soweit als möglich zusammen.

$$\frac{\frac{4}{7}-\frac{5}{6}}{\frac{9}{14}+\frac{5}{3}} \qquad \frac{\frac{2}{5}+\frac{4}{3}}{\frac{4}{5}-\frac{10}{13}} \qquad \frac{\frac{2}{9}+\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}$$

1) Berechnen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Binomischen Formeln.

$$(2x-4y)^2 \cdot (2y+x)^2$$

$$48 \cdot \left(0{,}5x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{4}x - 2y\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x + 2y\right)$$

$$12 \cdot \left(-\frac{2}{3} + 6x\right)^2 \cdot \big((3-4x) - 2(5-2x)\big)$$

2) Entfernen Sie den Wurzelterm aus dem Nenner.

$$\frac{x-2}{5-2\cdot\sqrt{3x-5}} \qquad \frac{\sqrt{x}}{3\cdot\sqrt{2x}+\sqrt{4-x}}$$

3) Bestimmen Sie die Lösung der Aufgaben mit Hilfe des Pascall'schen Dreiecks

$$(2x-y)^5 \left(-\frac{1}{2}x - 4\right)^4$$

Ü 4.5.25 Kürze: a) $\frac{49a^2-14ac+c^2}{14a-2c}$; b) $\frac{28u^2-63v^2}{12u^2+36uv+27v^2}$; c) $\frac{9x^2-25v^2}{3x+5v}$;

d) $\frac{4+4c+c^2}{c+2}$; e) $\frac{9u^2-6u+1}{9u^2-1}$; f) $\frac{27ad+18bd}{81a^2-36b^2}$; g) $\frac{x+x^2}{x^2-1}$;

h) $\frac{ax^2-ay^2}{2ax-3ay}$.

Ü 4.5.26 Addiere: a) $\frac{5}{6}+\frac{4}{15}-\frac{1}{10}$; b) $\frac{3}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{4}{21}$;

c) $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$; d) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2$; e) $\frac{u-v}{uv}-\frac{u-w}{uw}+\frac{v-w}{vw}$; f) $\frac{a-b}{a+b}-\frac{a}{a-b}$;

g) $\frac{1}{c+2}-\frac{1}{3a}+\frac{2b+1}{6ab}$; h) $\frac{2u^2-13v^2}{(2u-5v)^2}-\frac{2u+5v}{4u-10v}$; j) $\frac{4x-5}{2x-2}-\frac{6x+1}{3x-4}$;

k) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$; l) $\frac{x}{4x-8}-\frac{2x}{3x+6}+\frac{2x^2-9x}{5x^2-20}$

Ü 4.5.27 Berechne: a) $\frac{2}{7}:\frac{8}{21}$; b) $\frac{19}{27}:\frac{38}{63}$; c) $\frac{28ac}{9bd}:\frac{7ab}{12cd}$

d) $\frac{4xy}{7z}:\frac{8xy}{21z}$; e) $\frac{4u^2-16v^2}{3(u+v)}:\frac{2u-4v}{3u+6v}$.

Ü 4.5.28 Vereinfache: a) $\dfrac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$; b) $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}}$; c) $\dfrac{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}}{1-\frac{a}{a-b}}$.

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Polynomdivision

Satz von Vieta

differenzierbar

L‘Hospital

Linearfaktor

$f(x)$

stetig

Dominanzprinzip

$f''(x)$

$f'(x)$

Nullstelle