

VORKURS

17.09.2021

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wo liegt der Unterschied zwischen dem 1. und 2. Binom?
- ✓ Wie nutzt man das 1./2. Binom zum Kopfrechnen?
- ✓ Für was kann man das 3. Binom nutzen?
- ✓ Was bedeutet das Störprinzip in der Arithmetik?
- ✓ Was bewirkt ein Parameter in einer Funktionenschar?
- ✓ Was ist eine Tautologie in der Arithmetik?
- ✓ Wie hängt der Koeffizient mit der Variablen zusammen?
- ✓ Was ist die Nullform einer Gleichung?

AUFGABEN

a) $(2x - 0,1y)^2$

b) $(ax + 3y)^2$

c) $(2x - 0,5xy)(0,5xy + 2x)$

d) $\left(2cd - \frac{3}{c}d\right)^2$

e) $\left(\frac{x}{4} + 2xy\right)^2$

f) $\left(\frac{1}{3}x - 0,1y\right)\left(0,1y + \frac{1}{3}x\right)$

g) $(2i - 1)^4$

h) $(0,4i + 8)^5$

i) $\left(\frac{1}{4}i - 0,2x\right)\left(0,2x + \frac{1}{4}i\right)$

1) $3 \cdot \left(2y + \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x - 2y\right) - 4 \cdot \left(\frac{2}{y}x + 3y\right)^2$

2) $(3b - ab)(3b + ba) - (a - 2b)^2$

3) $\frac{3\sqrt{x} + 2}{1 + \sqrt{3x}}$

4) $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{3x} - 4}$

} machen Sie den Nenner rational

5) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{2x + 6}{6 - 2\sqrt{3 - 2x}} \right)$

6) $\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{x^2 - 4x - 12}{2\sqrt{2x + 4} - 8} \right)$

TEILBARKEIT

Eine ganze Zahl a ist dann durch eine ganze Zahl b teilbar, wenn das Ergebnis q der Division ebenfalls eine ganzen Zahlen ist, so dass man die Teilbarkeitsrelation wie folgt definieren kann:

$$| = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b = q \cdot a; q \in \mathbb{Z}\}$$

In der Mathematik nutzt man anstelle von $(a, b) \in |$ primär die Infix-Notation $a|b$ (gesprochen: a teilt b).

Daraus ergeben sich die folgenden Regeln / Zusammenhänge:

- Transitivität: $a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$
- Kürzbarkeit: $c \cdot a|c \cdot b \rightarrow a|b; c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- Produktregel: $a|b \wedge c|d \rightarrow a \cdot c|b \cdot d$
- Linearität: $a|b_1 \wedge a|b_2 \rightarrow a|m \cdot b_1 + n \cdot b_2; m, n \in \mathbb{Z}$

DIVISION MIT REST

Bei einer ganzzahligen Division mit Rest werden zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ betrachtet. Bei der Division entstehen immer zwei eindeutige Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$, so dass die größere Zahl b stets als *Produkt + Rest* beschrieben werden kann.

$$b = q \cdot a + r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r < |a|$$

Als ganzzahlige Division von b und a erhält man demzufolge q und es gilt: $\frac{b}{Z^a} = q$

Diese Definition des Rests haben wir bereits auf Seite 7 mit der Modulo-Operation kennen gelernt. Bei der Modulo-Operation erhalten wir nur den Rest der Division.

Beispiel: $a = 8; b = 115$

$$115 = 112 + 3 = 14 \cdot 8 + 3 \Rightarrow q = 14, r = 3$$

Es gilt demzufolge: $\frac{115}{Z^8} = 14$ und $115 \bmod 8 = 3$

GRÖßTER GEMEINSAMER TEILER

ggT: größter gemeinsamer Teiler:

Beim größten gemeinsamen Teiler sucht man die größtmögliche natürliche Zahl, die zwei oder mehr Zahlen ganzzahlig teilt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $d|a$ und $d|b$, wodurch d ein gemeinsamer Teiler von a und b sein muss.

Wenn jetzt für jeden anderen gemeinsamen Teiler c von a und b gilt, dass $c|d$, dann ist d auch der größte gemeinsame Teiler von a und b :

$$d = ggT(a, b)$$

Haben zwei Zahlen als größten gemeinsamen Teiler nur die eins, so dass $ggT(a, b) = 1$ gilt, so sind die Zahlen teilerfremd.

KLEINSTES GEMEINSAMES VIELFACHES

kgV: kleinstes gemeinsames Vielfaches:

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Pendant zum zuvor definierten ggT.

Es wird hier eine möglichst kleine natürliche Zahl gesucht, die das Vielfache zweier Zahlen darstellt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $a|d$ und $b|d$, wodurch d ein gemeinsames Vielfaches von a und b sein muss.

Wenn jetzt für jedes andere gemeinsame Vielfache c von a und b gilt, dass $d|c$, dann ist d auch das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b :

$$d = \text{kgV}(a, b)$$

Für die Berechnungen des ggT(a, b) und auch kgV(a, b) nutzt man u.a. das Verfahren der Primfaktorzerlegung.

PRIMFAKTORZERLEGUNG I

Primzahl:

Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist eine Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist: $P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \dots\}$

Primfaktorzerlegung:

Eine natürliche Zahl $p > 1$ kann als Produkt von Primzahlen dargestellt werden. Sortiert man diese Primfaktoren, so erhält man die kanonische Darstellung.

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$$

Für die Zerlegung faktorisiert man die Ausgangszahl und startet bei der kleinsten Primzahl und fass anschließend gleiche Faktoren zusammen.

$$504 = 2 \cdot 252 = 2 \cdot 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2^3 \cdot 63$$

$$63 = 3 \cdot 21 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$$

$$\Rightarrow 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

PRIMFAKTORZERLEGUNG II

Anwendung auf ggT(a,b) und kgV(a,b):

Im ersten Schritt zerlegt man die zu betrachtenden Zahlen in deren Primfaktoren.

$$\begin{aligned}160 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^5 \cdot 5 \\144 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2\end{aligned}$$

ggT - Bestimmung:

Zur Berechnung des ggT fasst man die gleichen Primfaktoren als Produkt zusammen:

$$\Rightarrow ggT(160,144) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

kgV - Bestimmung:

Zur Berechnung des kgV nimmt man die am häufigsten vorkommenden Primfaktoren und setzt diese zu einem Produkt zusammen:

$$\Rightarrow kgV(160,144) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 32 \cdot 9 \cdot 5 = 1.440$$

AUFGABEN

1. Zerlegen Sie die gegebenen Zahlen im ersten Schritt in deren Primfaktoren und bestimmen anschließend den größten gemeinsamen Teiler ggT sowie das kleinste gemeinsame Vielfache kgV.

a) $a = 3.528 \wedge b = 3.780$

b) $a = 776.160 \wedge b = 2.494.800$

c) $a = 1.008 \wedge b = 1.080 \wedge c = 2.940$

EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, kann man den $\text{ggT}(a,b)$ einfach bestimmen.

Es gilt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$

1. Berechnung der ganzzahligen Division mit Rest: $b = q \cdot a + r$ mit $0 \leq r < |a|$

2.1. Ist $r \neq 0$, dann ersetze $b := a$ und $a := r$ und Starte wieder bei 1.

2.2. Ist $r = 0$, dann ist a der gesuchte Wert vom $\text{ggT}(a,b)$.

Beispiel: $\text{ggT}(1.264, 616)$

$$1.264 = 2 \cdot 616 + 32$$

$$616 = 19 \cdot 32 + 8$$

$$32 = 4 \cdot 8 + 0$$

$$\Rightarrow \text{ggT}(1.264, 616) = 8$$

AUFGABEN

1. Wenden Sie bei den folgenden Aufgaben den Euklidischen Algorithmus an und bestimmen somit den ggT.

a) $a = 840 \wedge b = 980$

b) $a = 975 \wedge b = 2.340$

c) $a = 96.096 \wedge b = 1.092$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Grenzwert

Asymptote

ggT

Hyperbel

kgV

Faustregel
Grenzwerte

Primfaktorzerlegung

Nullfolge

Art der
Annäherung