VORKURS

13.09.2021

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Zu welchen Zahlenmengen gehört jeder Bruch?
- ✓ Warum benötigt man die imaginäre Achse?
- ✓ Warum ist das kartesische Produkt nicht kommutativ?
- ✓ Wie macht man eine als Relation definierte Funktion umkehrbar?
- ✓ Wie entsteht der Euklidische Vektorraum?
- ✓ Welche Gesetze gibt es in der Arithmetik?
- ✓ Wie überprüft man eine Klasseneinteilung einer Menge A?
- ✓ Was versteht man unter einer Potenzmenge?

KOMPLEXE ZAHLEN I

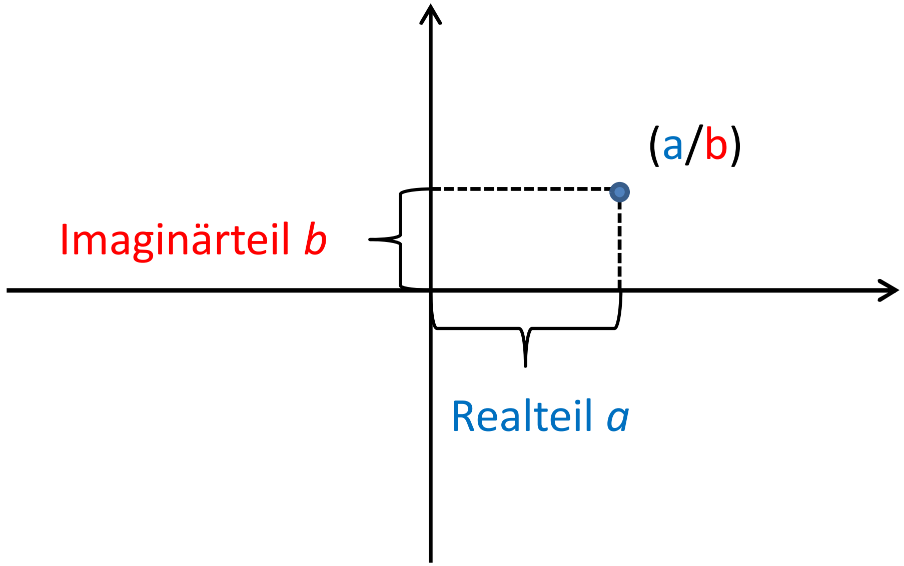
Jacques Hadamard (1865–1963)

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Aussagen über reelle Zahlen führt über komplexe Zahlen.

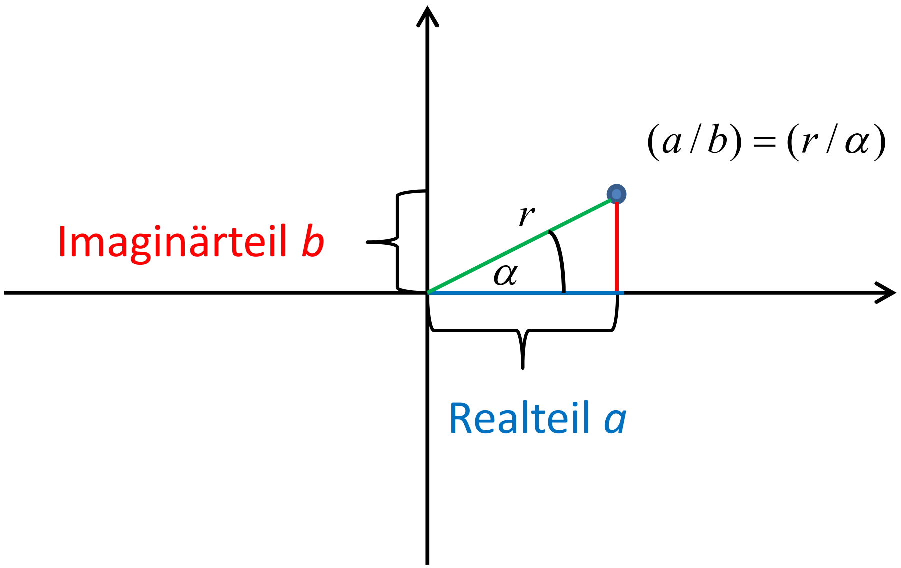
$$z = a + b \cdot i; i = \sqrt{-1}$$

Realteil

Imaginärteil



KOMPLEXE ZAHLEN II



a = Ankathete

b = Gegenkathete

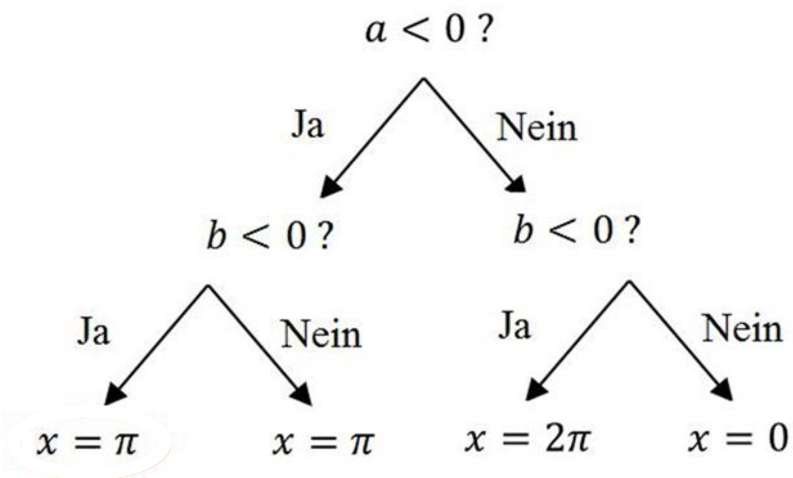
r = Hypotenuse

Betrag: $r=\sqrt{a^2+b^2}$

Argument: $\alpha=\arctan\frac{b}{a}+x \quad \begin{cases} a>0\wedge b>0\Rightarrow x=0\pi \\ a>0\wedge b<0\Rightarrow x=2\pi \\ a<0\wedge b>0\Rightarrow x=\pi \\ a<0\wedge b<0\Rightarrow x=\pi \end{cases}$

KOMPLEXE ZAHLEN III

Entscheidungsbaum für das Argument von $z = a + b \cdot i$



<u>Anmerkung</u>:
Wenn die komplexe Zahl direkt auf einer Achse liegt, also eine der Koordinaten null ist, müssen Sie für das Argument immer ein Vielfaches von 90° nutzen.

KOMPLEXE ZAHLEN III

Potenzen des Imaginärteils i^{EXP}:

$$i^{0+4\cdot n} = i^0 \cdot i^{4\cdot n} = 1 \cdot (i^4)^n = 1 \cdot 1^n = 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 0$$

$$i^{1+4\cdot n} = i^1 \cdot i^{4\cdot n} = i \cdot (i^4)^n = i \cdot 1^n = i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 1$$

$$i^{2+4\cdot n} = i^2 \cdot i^{4\cdot n} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \cdot (i^4)^n = (-1) \cdot 1^n = -1 \cdot 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 2$$

$$i^{3+4\cdot n} = i^3 \cdot i^{4\cdot n} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \cdot i \cdot (i^4)^n = (-i) \cdot 1^n = -i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 3$$

<u>Beispiel:</u>

$$(3+2i) + (7-5i) = (3+7) + (2-5)i = 10 - 3i$$

$$(3+2i) \cdot (7-5i) = (3 \cdot 7) + \big(3 \cdot (-5i)\big) + (2i \cdot 7) + \big(2i \cdot (-5i)\big) = 21 - 15i + 14i - 10i^2 = 31 - i$$

$$2i^3 \cdot (3+2i)^2 = -2i \cdot (9 + 12i + 4i^2) = -2i \cdot (5 + 12i) = 24 - 10i$$

KOMPLEXE ZAHLEN IV

Darstellung einer komplexen Zahl:

✓Kartesische Darstellung: $z = a + b \cdot i$

✓Trigonometrische Darstellung: $z = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$

✓Exponentielle Darstellung: $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$

Beispiel: $z = 3 - 4 \cdot i$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 360 \approx 307° \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 5 \cdot (\cos(307) + i \cdot \sin(307)) \\ z = 5 \cdot e^{i \cdot 307} \end{array}$$

KOMPLEXE ZAHLEN V

Die konjugiert komplexe Zahl:

Um den Imaginärteil einer komplexen Zahl zu beseitigen, wird mittels des 3. Binoms der Ausdruck erweitert (konjugiert komplexen Zahl).

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$$

Betrag:

$$z = 2 - 5i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 5i$$

$$r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(2 - 5i) \cdot (2 + 5i)} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Division:

$$\frac{9 - 2i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{27 - 6i - 9i + 2i^2}{3^2 - i^2} = \frac{25 - 15i}{10} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} i = 2{,}5 - 1{,}5i$$

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels kartesischer Form an. Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

1) $(1-2i)^3 \cdot [(3-i)\cdot(2i+6)\cdot i]$

2) $\dfrac{3+2i}{4-i} + \dfrac{-12-3i}{2i-3}$

3) $(2+3i)^2 \cdot 2(1-2i)^2 \cdot i^{13}$

KOMPLEXE ZAHLEN VI

Die Potenz einer komplexe Zahl:

Kartesische Form: $(a+bi)^n = (a+bi)\cdot(a+bi)\cdot\dots\cdot(a+bi)$

Berechnung via Binom oder Pascal'sche Dreieck

Trigonometrische Form: $\left[r\cdot\left(cos(\alpha)+i\cdot sin(\alpha)\right)\right]^n$

Berechnung mittels der Formel von de Moivre

$r^n\cdot\left(cos(n\cdot\alpha)+i\cdot sin(n\cdot\alpha)\right)$

Exponentielle Form: $\left[r\cdot e^{i\cdot\alpha}\right]^n$

Berechnung mittels der Potenzgesetze

$\Rightarrow r^n\cdot\left(e^{i\cdot\alpha}\right)^n = r^n\cdot e^{n\cdot(i\cdot\alpha)}$

KOMPLEXE ZAHLEN VII

Beispiel: $z^3 = (3-4i)^3,\ r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,\ \alpha = arc\ tan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi \approx 307°$

Kartesische Form:

$$(3-4i)^3 = (3-4i)^2 \cdot (3-4i)$$
$$(-7-24i) \cdot (3-4i)$$
$$-21 + 28i - 72i + 96i^2 = -117 - 44i$$

Trigonometrische Form:

$$\left[5 \cdot \left(cos(307°) + i \cdot sin(307°)\right)\right]^3$$
$$5^3 \cdot \left(cos(3 \cdot 307°) + i \cdot sin(3 \cdot 307°)\right)$$
$$125 \cdot \left(cos(201°) + i \cdot sin(201)\right)$$

Exponentielle Form:

$$\left[5 \cdot e^{i \cdot 307°}\right]^3$$
$$5^3 \cdot \left(e^{i \cdot 307°}\right)^3 = 125 \cdot e^{3 \cdot (307° \cdot i)} = 125 \cdot e^{921 \cdot i}$$

KOMPLEXE ZAHLEN VIII

Die Wurzel einer komplexe Zahl:

Während es beim Potenzieren einer komplexen Zahl nur eine Lösung gibt, entstehen beim Ziehen der n-ten Wurzel stets n-1 Lösungen.

Moivre'sche Formel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[cos\left(\frac{\alpha+2k\cdot\pi}{n}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\alpha+2k\cdot\pi}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$

Sobald $k = n$ gilt wiederholen sich die Lösungen

Beispiel:

$$z^4 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} \text{ mit } r = 1 \; und \, \alpha = \pi$$

$$k = 0{:}\; z_o = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$k = 1{:}\; z_1 = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)\right]$$

$$k = 2{:}\; z_2 = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)\right]$$

$$k = 3{:}\; z_3 = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)\right]$$

KOMPLEXE ZAHLEN IX

Die Wurzel einer komplexe Zahl:

Während es beim Potenzieren einer komplexen Zahl nur eine Lösung gibt, entstehen beim Ziehen der n-ten Wurzel stets n-1 Lösungen.

Polarform: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot e^{i\cdot(\alpha+2k\cdot\pi)}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\alpha+2k\cdot\pi}{n}}$

$k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$

Sobald $k = n$ gilt wiederholen sich die Lösungen

Beispiel: $z^4 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$ mit $r = 1$ $und\, \alpha = \pi$

$$k = 0:\ z_o = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$$

$$k = 1:\ z_1 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$$

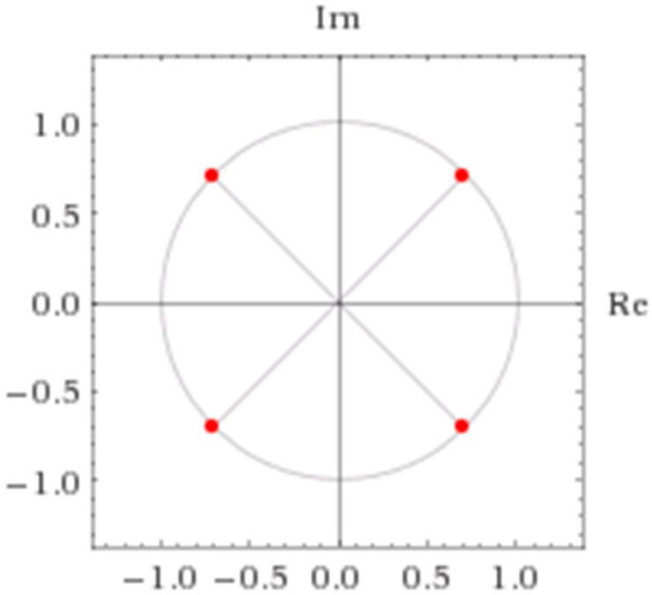
$$k = 2:\ z_2 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}$$

$$k = 3:\ z_3 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}$$

KOMPLEXE ZAHLEN X

Grafische Darstellung der Lösung zu $z^4 = -1$:

- Aufgrund des imaginären Raums, entspricht die Anzahl der Lösungen dem Grad der zu ziehenden Wurzel.



- Grafisch entsteht bei der Verbindung der Lösungspunkte ein Kreis, wobei der Radius identisch mit dem Betrag der komplexen ist.

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels exponentieller und trigonometrischer Form an.

Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

1. $\left(2i - \sqrt{3}\right)^4 \cdot (4 + 0{,}5i)^3$

2. $z^5 = 32i$

3. Bestimmen Sie die kartesische Form zu
   $z = 16 \cdot \left(cos(150°) + i \cdot sin(150°)\right)$
   auf zwei Arten.

DEG	0°	30°	45°	60°	90°
RAD	0π	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
SIN	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
COS	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
TAN	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Argument

arcus

Imaginärteil

kartesische Darstellung

Betrag

Realteil

trigonometrische Darstellung

Erweiterung 3. Binom

exponentielle Darstellung

Eine handvoll S von Schreiber

$EXP\ mod\ 4 = ?$