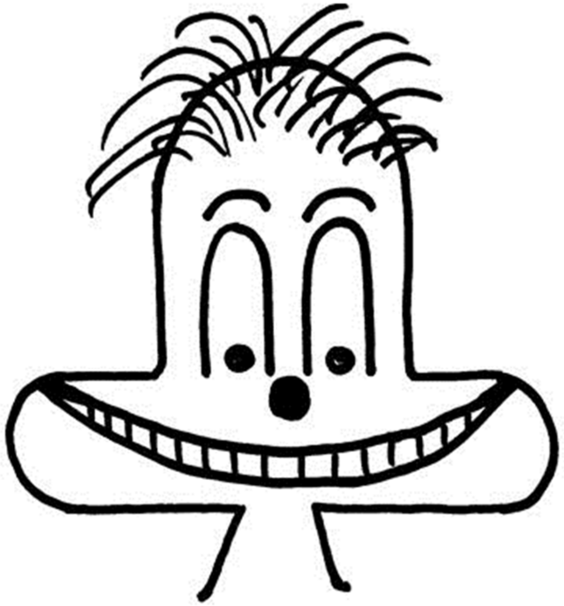
Mathematik Vorkurs

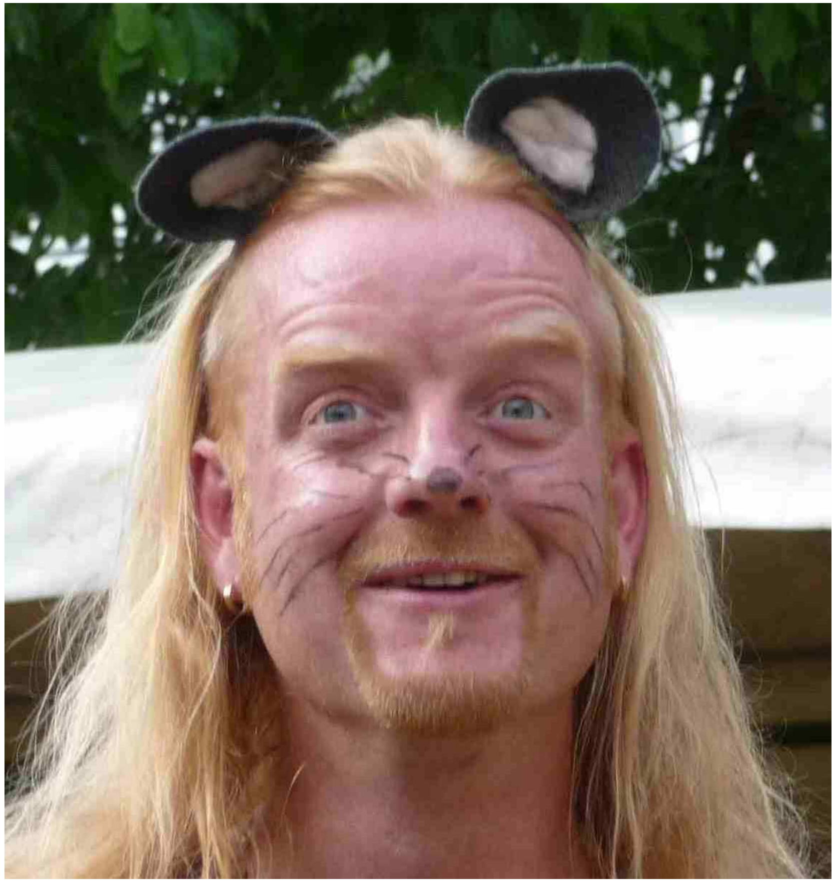


11.09.2019 – 10.10.2019

Vorkurs Mathematik 2019

Torsten Schreiber

Mathematik ist begreifbar...



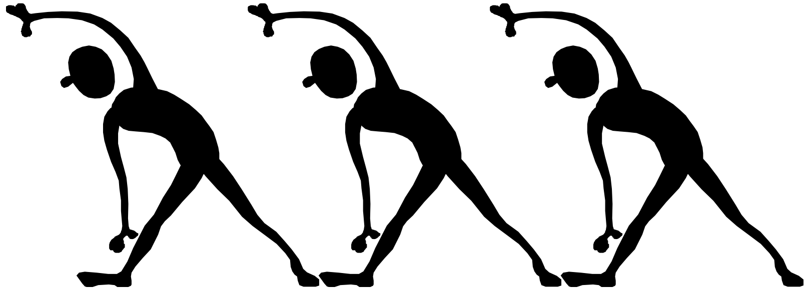
www.mathematik-guru.de

... und macht sogar Spaß!

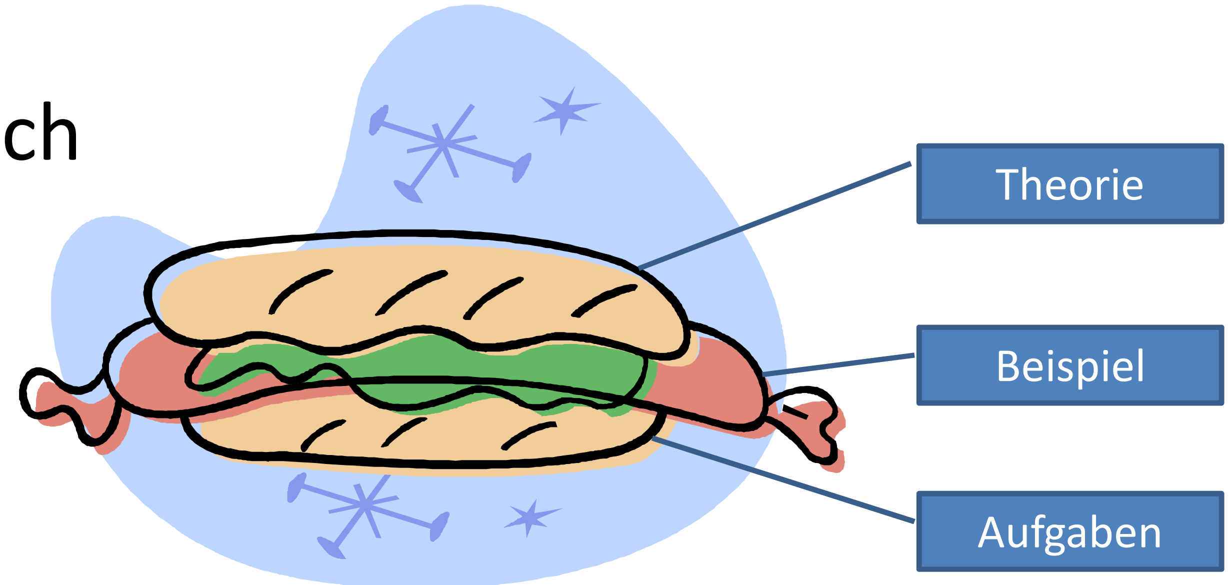
schreiber@mathematik-guru.de

Methodik meiner Veranstaltung

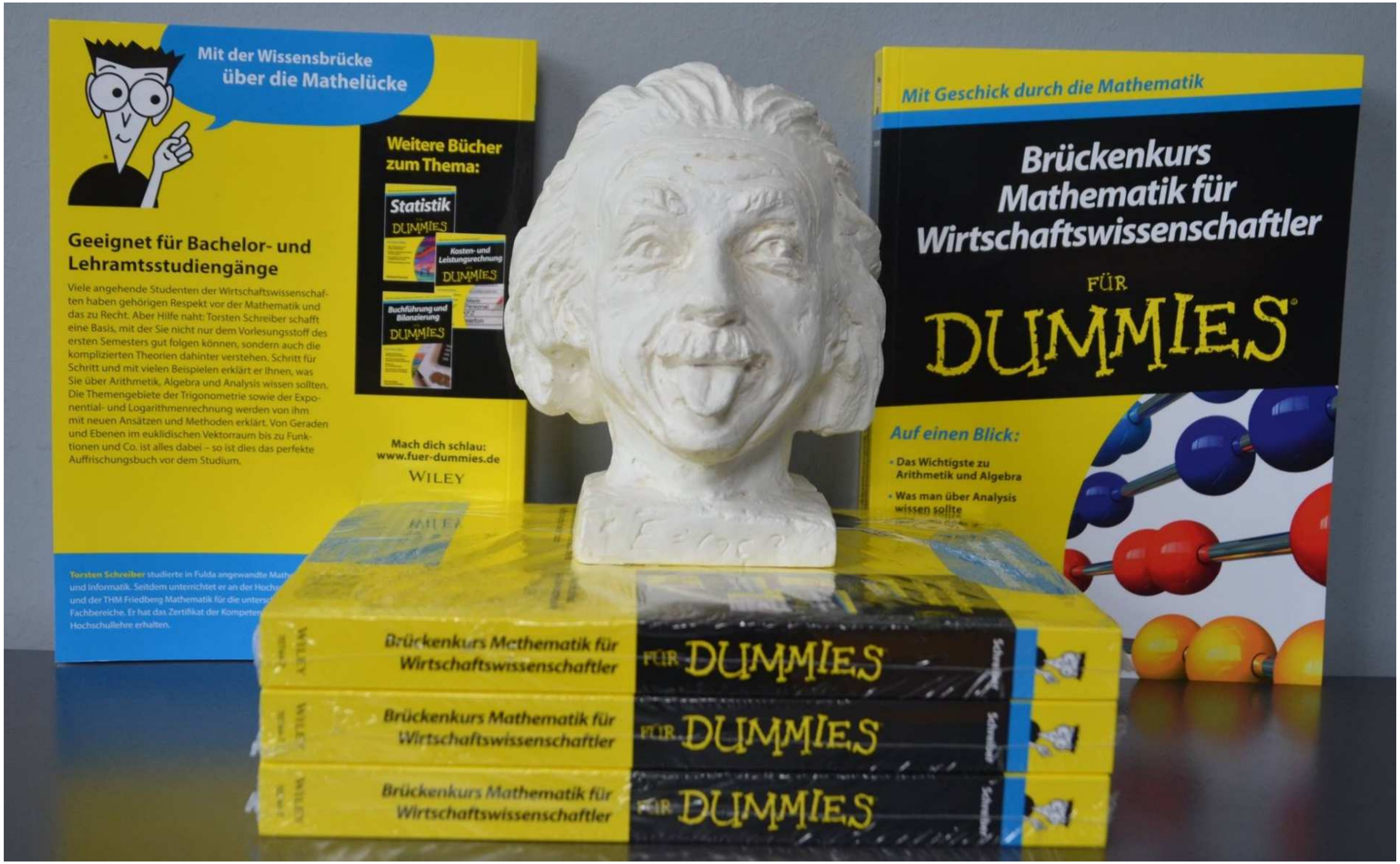
- WarmUp



- n-Sandwich



Mein Buch

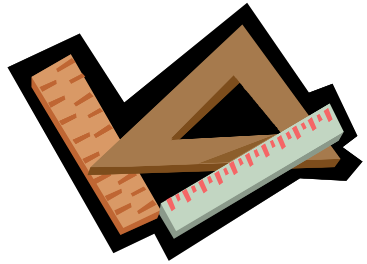


ISBN: 978-3527707447

Themengebiete des Vorkurses

1. **Mengen**
   Grundlagen / Gesetze und Junktoren / Zahlenmengen
2. **Komplexe Zahlen**
   Definition und grafische Darstellung / Grundrechenarten
3. **einfache Bruchrechnung**
   Rechengesetze / Methodiken
4. **erweiterte Bruchrechnung**
   leichte Gleichungen / Doppelbruch
5. **Rechnen mit Potenzen / Wurzeln**
   ganz- und gebrochen rationaler Exponent
6. **Exponential- / Logarithmenrechnung**
   Rechengesetze und graphische Darstellung
7. **Gleichung / Ungleichungen mit einer Unbekannten**
   Rechnung und Grafik
8. **Gleichung / Ungleichungen mit 2 Unbekannten**
   Additions-, Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren; grafische Lösung
9. **(Bi)-quadratische Gleichung**
   quadratische Ergänzung, p-q-Formel, Satz von Vieta
10. **Lineare Gleichungssysteme**
    Gauß'sche Eliminationsverfahren
11. **Trigonometrie am Einheitskreis und im allgemeinen Dreieck**
    Funktionsgraph und Berechnungen (Additionstheoreme)
12. **Vektorrechnung**
    Euklidischer Vektorraum / Lagerelation von Geraden im R^3

Die Klausur



Theorie der schönen Zahlen

Taschenrechner brauchen wir nicht!

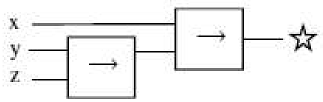
Bücher gehören in die Bibliothek – außer das von mir

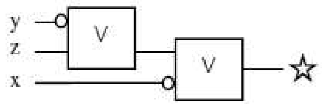
Alles was ich geschrieben habe, darf ich auch nutzen.

1. **<u>Mengenlehre (8 Punkte):</u>**
Gegeben sind die Menge A der natürlichen Zahlen (größer 7 und kleiner gleich 22), die durch 2 oder 3 oder auch durch 5 teilbar sind und die Menge B der nicht durch zwei teilbare Zahlen im Intervall von $]6; 24]$.
Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

2. **<u>Aussagenlogik (8 Punkte):</u>**
Geben Sie für die folgenden beiden Schaltungen die zugehörigen Aussageformeln an und zeigen Sie, dass beide Ausdrücke äquivalent zueinander sind (Begründung).

I.


II.


3. **<u>Bruchrechnung (8 Punkte):</u>**

a) $\left[2\frac{1}{3}-1{,}5\cdot\left(3-\frac{2}{x}\right)+\frac{7}{10}+\frac{3}{x}\cdot(0{,}5x-1)\right]:\frac{1}{3}$

b) $\dfrac{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4(a-2b)^2}}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-4ab+4b^2}}$

4. **<u>Komplexe Zahlen (8 Punkte):</u>**
Berechnen Sie die Lösungen der folgenden komplexen Gleichungen und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form z=a+bi an. Bestimmen Sie bei Aufgabe b) zusätzlich noch den Betrag und das Argument.

a) $z=\frac{5i\cdot(3+9i)}{(3i+1)^2}-\frac{(4i-3)^2}{(1-3i)}$

b) $z^2-(6i-4)\cdot z=12i+9$

5. **<u>Arithmetik (8 Punkte):</u>**
Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $-\left[\left(2x-\frac{1}{2}z\right)^4-\left(\frac{1}{4}z^2+12x^2\right)^2\right]-16x^3\cdot(8x+z)$

b) $14\cdot\left[x-\left(2y-2\cdot(x-(2z+3y))-4\cdot(2y+z)\right)\right]$

6. **Exponential-/Logarithmusrechnung (16 Punkte):**
Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitestgehend:

a) $\frac{2\cdot(27x^2y^3z^{-2})^3}{(8x^2y^{-5}z^3)^{-2}} : \frac{3\cdot(0{,}25xy^{-5}z^{-3})^{-3}}{(9^{-1}x^{-3}y^4z^2)^4}$

b) $\frac{\sqrt[4n]{a^{8n-3}}}{\sqrt[2n]{a^{5n-2}}} : \frac{\sqrt[n]{(\sqrt{a})^{3n+2}}}{\sqrt[2n]{\sqrt{a^{3+7n}}}}$

c) $4^{ld3} + \log 0{,}001 + 2\cdot\sqrt[3]{e^{ln8}} + \frac{1}{4}\cdot ld\frac{1}{256} - \left(\frac{1}{100}\right)^{log0{,}25} - 3\cdot ln\sqrt[3]{\frac{1}{e^8}}$

d) $3\cdot logx - log2 + 3\cdot(log2 - logx^2) = 2\cdot log\frac{1}{4} + 4\cdot\left(logx + 0{,}5\cdot log\sqrt{2}\right) - 2\cdot logx^4$

7. **Parabelfunktion (8 Punkte):**
Berechnen Sie den Scheitelpunkt, die Schnittpunkte mit beiden Achsen und beschreiben den Verlauf der Parabeln.

a) $f(x) = -4x^2 + 8x + 32$ b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5x + 18$

8. **Ungleichungen (8 Punkte):**
Berechnen Sie den Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen.

a) $3\cdot|8 - 2x| \leq 36$ b) $\frac{(x-2)^2}{x-8} > 6 + x$

9. **Gleichungen mit einer Unbekannten (8 Punkte):**
Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie – sofern erforderlich – den Definitionsbereich an.

a) $x^5\cdot(x^5 - 33) = -32$ b) $2x\cdot(x-2)\cdot(x+2) + 8x^2 = 16 + 2x\cdot(x+2)$

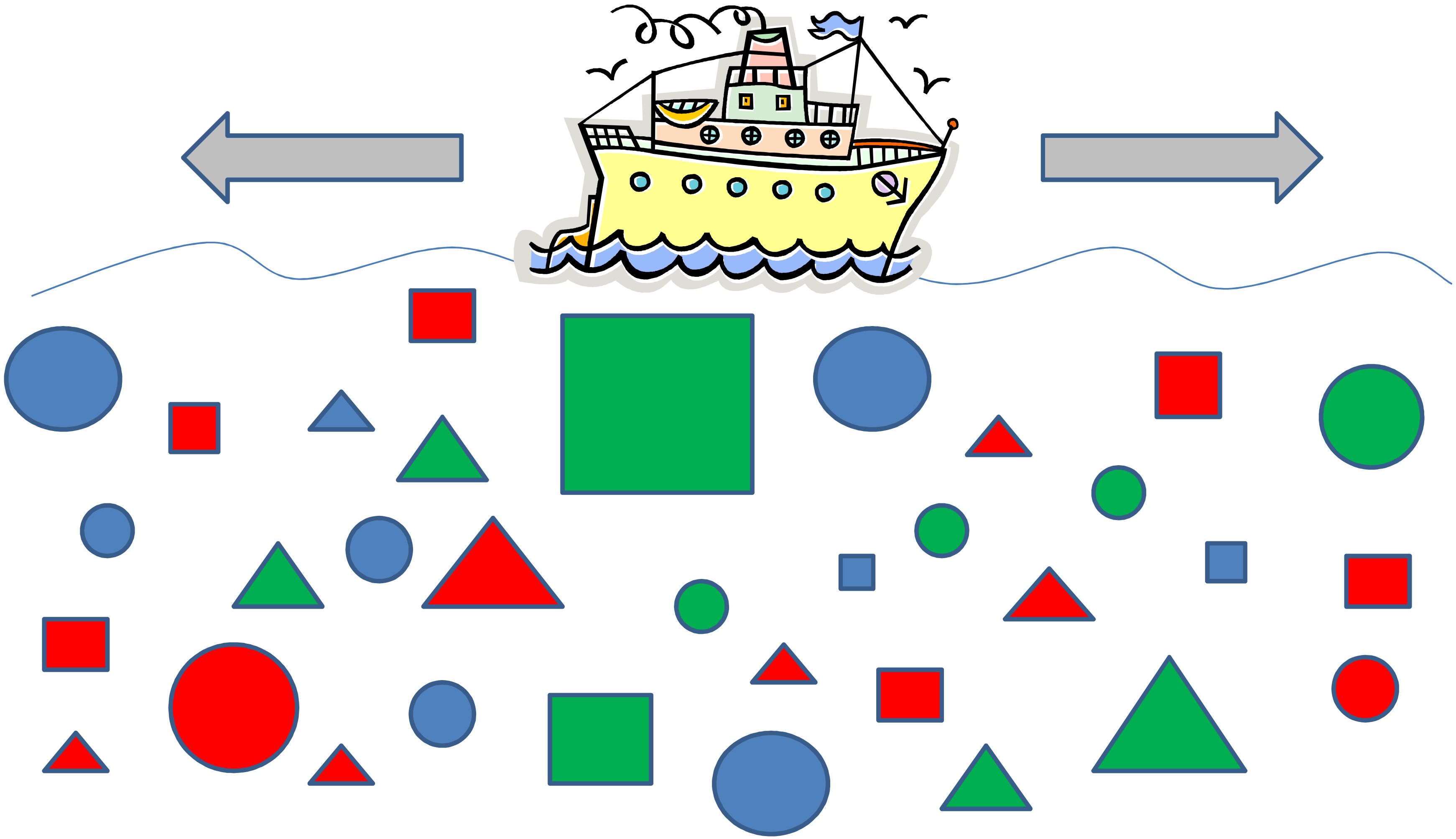
10. **Lineare Gleichungssysteme (12 Punkte):**
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left|\begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ 0{,}5x + 5 = -6y \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{r} -x + 2y + 3z = 7 \\ x + 3y - 3z = -2 \\ 2x - y + 2z = 5 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{r} 0{,}75x + y = 1 \\ 2x - 10 = y \end{array}\right|$

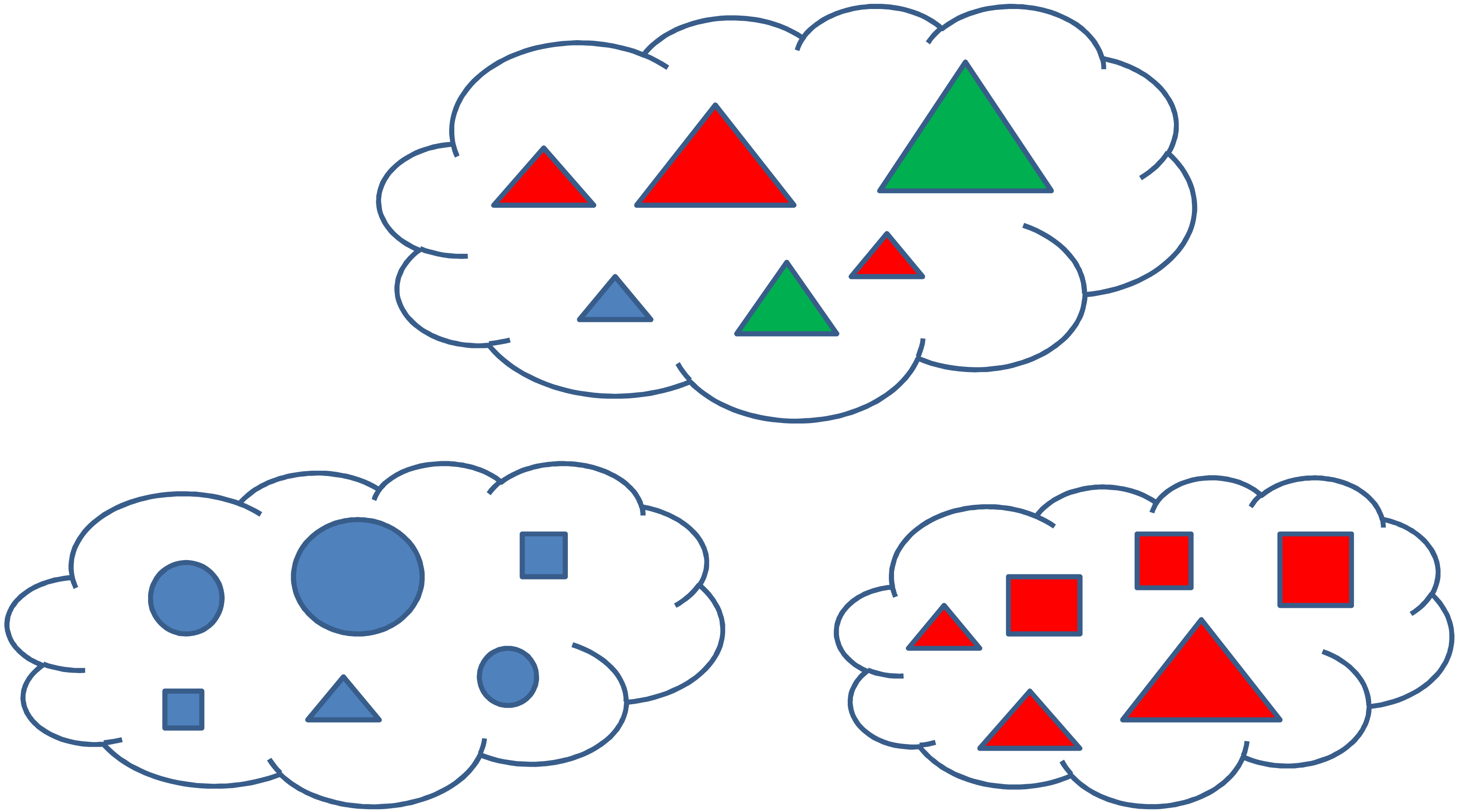
beliebig Gauß-Verfahren beliebig

11. **Trigonometrie (6 Punkte):**
Gegeben sei die Funktion mit $f(x) = -2{,}5\cdot sin\left(\frac{2}{3}x - 5{,}5\pi\right) + 3{,}5$.
Bestimmen und beweisen Sie die Periode, Symmetrie und Amplituden(Wertebereich) von $f(x)$.

URKNALL DER MATHEMATIK



GRUPPEN VON MENGEN



MENGENDEFINITION

{ Objekt}

{ Menge } **{ Element }** **{ }**

Reihenfolge spielt keine Rolle

Unterscheidbarkeit der Objekte (redundanzfrei)

OBJEKTFORMEN

Objekt	Beschreibung
$\{1,2\}$	
$(1;2)$	
$1,2$	
$\{\{1;2\}\}$	
$(1,2,1,2,1)$	
$\{(1;2)\}$	
$1;2$	
$[1;2[$	
$\{1,2;1;\{2\}\}$	
$\{(1,1,1);(2,2,2)\}$	

OBJEKTFORMEN

Objekt	Beschreibung
$\{a, b\}$	
$(5; 8)$	
$-7{,}6$	
$\{\{8; 15; 21\}\}$	
$(4/-2{,}3/1{,}4)$	
$\{(-2; 4]\}$	
$3; 15$	
$[7; 7[$	
$\{-3{,}2; 3; \{32\}\}$	
$\{(5{,}6{,}7); (8{,}2{,}1)\}$	

OBJEKTFORMEN

Objekt	**Beschreibung**
$\{a, b\}$	Menge mit einem Objekt
$(5; 8)$	Tupel mit zwei Werten
$-7{,}6$	Element
$\{\{8; 15; 21\}\}$	Menge einer Menge mit 3 Objekten
$(4/-2{,}3/1{,}4)$	3-dimensionales Tupel
$\{(-2; 4]\}$	Menge eines halboffenen Intervalls
$3; 15$	2 Elemente
$[7; 7[$	Halboffenes Intervall bzw. leere Menge
$\{-3{,}2; 3; \{32\}\}$	Menge mit zwei Elementen und einer Menge
$\{(5{,}6{,}7); (8{,}2{,}1)\}$	Menge aus zwei 3-dimnensionalen Tupeln

DARSTELLUNGSFORMEN I

1) Aufzählung:
   Die einzelnen Objekte werden innerhalb der Menge aufgeführt, wobei Platzhalter in Form von „...“ dargestellt werden.
2) Einschluss:
   Basierend auf einer beliebigen Ausgangsmenge wird ein Gesetz definiert, das die enthaltenden Objekte beschreibt.
3) Ausschluss:
   Aus einer Grundzahlenmenge werden die Objekte definiert, die nicht enthalten sein dürfen.

Beispiel: *Mengen der geraden, natürlichen Zahlen*

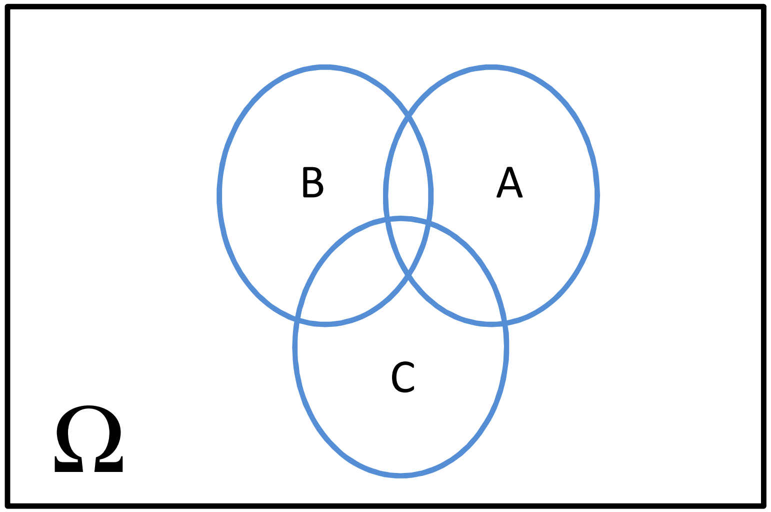
$$1) G_{\mathrm{N}} = \{2;4;6;8;...\}$$

$$2) G_{\mathrm{N}} = \{x \in \mathrm{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$$

$$3) G_{\mathrm{N}} = x \in \mathrm{N} \setminus \{x \in \mathrm{N} \mid x \bmod 2 <> 0\}$$

DARSTELLUNGSFORMEN II

4) <u>Vennsches Diagramm</u>:
Es werden die existierenden Mengen mittels Kreise in die Welt (Kasten) eingetragen.



Die dadurch entstehenden Untermengen sind:

- Vereinigungsmenge (ODER-Verknüpfung)
- Schnittmenge (UND-Verknüpfung)

MODULO

Die Modulo-Funktion entspricht einem Restwertoperator, d.h. bei einer ganzzahligen Division wird der Rest als Ergebnis dargestellt.

$$X \bmod Y = R$$

Zähler　　Nenner (Divisor)　　Restwert

<u>Beispiel</u>:

$5 \bmod 2 = 1$, denn $5 \div 2 = 2$ Rest 1

$23 \bmod 5 = 3$, denn $23 \div 5 = 4$ Rest 3

<u>Teilbarkeit</u>: Restwert muss 0 ergeben

$x \bmod 7 = 0$ 　x ist teilbar durch 7

$x \bmod 2 <> 0$ 　x ist nicht durch 2 teilbar (ungerade Zahl)

AUFGABEN

Lösen Sie die folgenden Übungen, in dem Sie je einmal die Mengen via Aufzählung und einmal mittels Eigenschaften definieren.

1) Beschreiben Sie alle nicht durch sieben teilbaren natürlichen Zahlen.

2) Definieren Sie alle ganze Zahlen größer -10, die durch vier oder durch 5 teilbar sind.

3) Geben Sie alle positiven ganzen Zahlen kleiner gleich 100 an, die durch drei und durch fünf teilbar sind.

4) Nennen Sie alle Zahlen zwischen 4 und 42, die weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind.

5) Welche Zahlen größer als 42 sind durch 7 aber nicht durch 3 teilbar.

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Menge

Element

redundanzfrei

Modulo

Junktor

Intervall

Schnittmenge

Relation

Venn‘sches Diagramm

Einschluss

Vereinigungsmenge

Ausschluss

Tupel

VORKURS

12.09.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Welche Objekte können in einer Menge vorhanden sein?
- ✓ Was für Gesetze gelten bzgl. einer Menge?
- ✓ Was ist ein Junktor (Beispiel aus der Arithmetik)?
- ✓ Was ist ein Tupel?
- ✓ Was stellt eine runde Klammer eines Intervalls dar?
- ✓ Wie ist die Eigenschaftsdefinition einer Menge aufgebaut?
- ✓ Wie beschreibt man die Teilbarkeit von Zahlen?
- ✓ Was versteht man unter einer Relation?

AUFGABEN

1) Beschreiben Sie alle ganzen Zahlen zwischen -100 und 100, die durch 3 und durch 5 teilbaren sind.

2) Definieren Sie alle natürlichen Zahlen größer gleich 10 ohne die Zahl 42, die durch 4 aber nicht durch 6 teilbar sind.

3) Beschreiben Sie mittels einer Menge alle Tupel von Studenten (x;y) - jeweils Personen je Tupel, die im gleichen Jahr Geburtstag haben.

4) Bauen Sie die Beschreibung einer Menge zusammen, die aus einem zweidimensionalen Tupel natürlicher Zahlen besteht, wobei die erste Zahl um 2 kleiner als die zweite sein soll und geben Sie 4 Beispieltupel an.

   Skizzieren Sie den Graphen?

TEILMENGE / INKLUSION

Sofern die Ausgangsmenge ein Teil oder komplett innerhalb einer weiteren Menge vorhanden ist, so spricht man von einer Teilmengenbeziehung bzw. von einer Inklusion.

Methodik:

1) Streichen der Mengenklammer bei der Ausgangsmenge

2) Jedes Objekt muss bzgl. Wert und Format in der 2. Menge auftauchen

$$\{a\} \subset Alphabet \;\Downarrow\; a \in Alphabet$$

Eigenschaften:

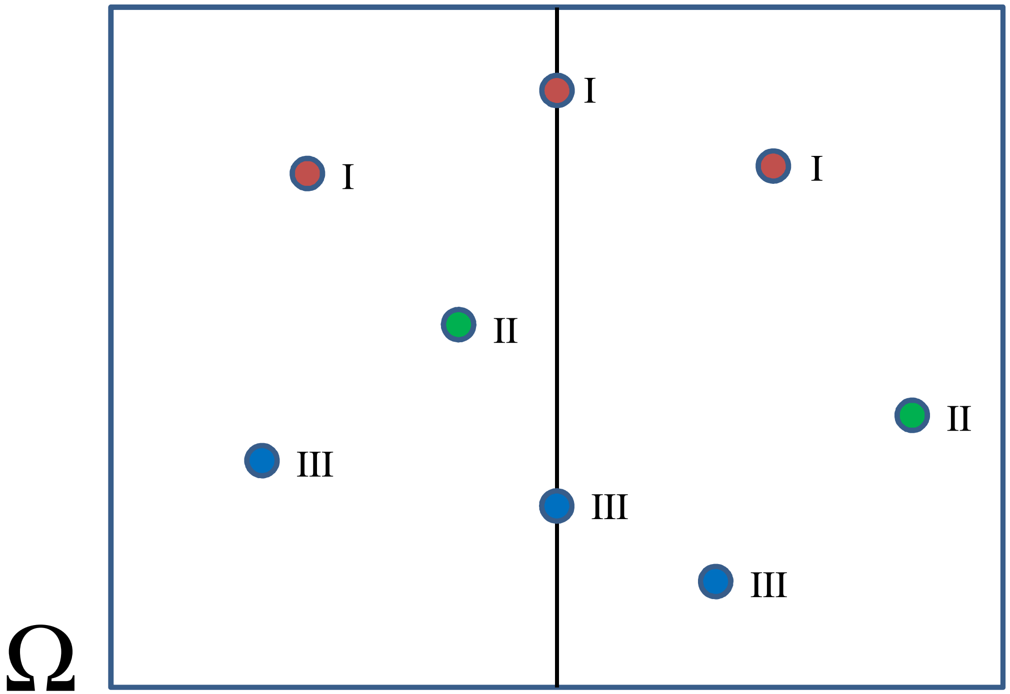
✓Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge $\{\ \} \subset A$

✓**reflexiv:** Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst $A \subset A$

✓**transitiv:** logische Schlussfolgerungen sind zugelassen $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

✓**antisymmentrie:** Beweisprinzip der Extensionalität $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN



✓**Symmetrie (I):**
Zu jedem Punkt gehört ein Spiegelpunkt.

✓**Asymmetrie (I I):**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt.

✓**Antisymmetrie (I I I):**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt aber mindestens ein Punkt auf der Spiegelachse.

Sind mehrere Symmetrievarianten vorhanden, so kann keinerlei Aussage über das Symmetrieverhalten getroffen werden.

JUNKTOREN

Junktoren entsprechen Verbindungen / Operatoren die beliebige Objekte miteinander verknüpfen können (Artithmetik: „+“, „-“, „*“, „:“).

UND $(A \cap B)$:
Das Objekt der Lösung gehört gleichzeitig zu den Menge A und B. (*Durchschnitt*)
Beispiel: Primzahl $\cap$ gerade, natürliche Zahl $= \{2\}$

ODER $(A \cup B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A oder B oder zu A und B. (*Vereinigung*)
Beispiel: ungerade Zahl $\cup$ gerade, natürliche Zahl = $\mathbb{N}$

NICHT $(A \setminus B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A aber nicht zu B. (*Differenz*)
Beispiel: natürliche Zahl $\setminus$ gerade, natürliche Zahl = ungerade Zahl

AUFGABEN

1) Gegeben sei die Menge $A = \{42; \{x; y\}, \{\ \}\}$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

$a) x \in A$ $\quad b) \{x; y\} \subset A$ $\quad c) \{42\} \subset A$ $\quad d) \{42\} \in A$ $\quad e) 42 \in A$

$f) 42 \subset A$ $\quad g) \{\ \} \in A$ $\quad h) \{\ \} \subset A$ $\quad i) \{\{\ \}\} \subset A$ $\quad j) \{4\} \subset A$

2) Gegeben sind die Mengen der durch 5 teilbaren, ganzen Zahlen A und die Menge B mit {-10, -9, -8…8, 9, 10}. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Aussagen als Aufzählung und unter Verwendung der Eigenschaften bzgl. der ganzen Zahlenmenge:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

3) Gegeben sind die Menge $A = \{x \in \Re \mid 42 \leq x < 50\}$ und die Menge B der durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen (kleiner 45). Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Inklusion

transitiv

Asymmetrie

reflexiv

Antisymmetrie

$\cap$

$\cup$

Symmetrie

/

Primzahl

Operator

$\subset, \subseteq$

$\in, \notin$

VORKURS

16.09.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie können Sie effektiv eine Zahl mit 32 multipizieren?
- ✓ Was wird bei der Inklusion gesucht?
- ✓ Wann ist ein Ausdruck transitiv, wann reflexiv?
- ✓ Welche Symmetriearten kennen Sie?
- ✓ Wie beweisen Sie, dass zwei Mengen identisch sind?
- ✓ Welche Objekte werden durch die ODER-Verbindung gesucht?
- ✓ Warum ist die UND-Verbindung für die Negation wichtig?
- ✓ Wie schließen Sie eine Zahl aus einer Menge aus?

AUFGABEN

1) Gegeben sind die Menge A mit $A = \{-6; -4; -2; 0; 2; 6; 14; 16; 18; 20; 22; 26\}$ und die Menge B der ganzen Zahlen (größer gleich -10 und kleiner als 33), die durch 4 oder durch 10 teilbar sind.
Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$

2) Gegeben sind die Menge A der natürlichen Zahlen (größer 7 und kleiner gleich 22), die durch 2 oder 3 oder durch 5 teilbar sind und die Menge B der nicht durch zwei teilbare Zahlen im Intervall von $]6; 24]$.
Bestimmen Sie die Lösungen (2-mal Aufzählung <u>und</u> 2-mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$

ZAHLENMENGEN

$N \rightarrow$	Natürliche Zahlen	$\{1;2;3...\}$
$Z \rightarrow$	Ganze Zahlen	$\{...-2;-1;0;1;2...\}$
$Q \rightarrow$	Rationale Zahlen	$\frac{a}{b}; a \in Z \wedge b \in Z \setminus \{0\}$ *Endliche Nachkommastellen, Periode*
$R \rightarrow$	Reelle Zahlen	$\{\pi; e; \sqrt{2}; ...\}$ *Unendliche Nachkommastellen*
$C \rightarrow$	Komplexe Zahlen	$z = a + b \cdot i \wedge i = \sqrt{-1}$

KARTESISCHES PRODUKT

Das kartesische Produkt wird mittels Kreuzprodukt aus beliebigen Mengen gebildet, wobei jedes Objekt der linken Menge mit jedem weitern Objekt übrigen Mengen kombiniert wird.

Als Ergebnis entsteht ein n-dimensionales Tupel $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Die entstehende geordnete Punktmenge ist **nicht kommutativ**.

Der Euklidische Vektorraum lässt sich als kartesische Produkt somit wie folgt darstellen: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = (x_1, x_2, x_3)$

<u>Beispiel:</u> $A = \{a; b; c\}$ $B = \{1; 2;\}$

$$AxB = \{(a,1); (a,2); (b,1); (b,2); (c,1); (c,2);\}$$

$$BxA = \{(1,a); (1,b); (1,c); (2,a); (2,b); (2,c);\}$$

GESETZE / ZUSAMMENHÄNGE

Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan:	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Komplement:	$\overline{A} \cap A = \{\ \}$	$\overline{A} \cup A = \Omega$
Absorption:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

<u>Zusammenhänge</u> zwischen $A; \{\ \}; \Omega$

$\cap: \quad A \cap A = A \qquad A \cap \Omega = A \qquad A \cap \{\ \} = \{\ \}$

$\cup: \quad A \cup A = A \qquad A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cup \{\ \} = A$

Neutrales Objekt: $A \cap \Omega = A \qquad A \cup \{\ \} = A$

AUFGABEN

Beweisen Sie die folgenden Ausdrücke unter Benennung aller angewandten Gesetze

1) Das Absorptionsgesetz $A \cap (A \cup B) = A$

2) Veranschaulichen Sie das De Morgangesetz $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ in einem Vennschen Diagramm

3) Vereinfachen Sie die Robbinsgleichung: $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup \overline{B}}}$

KLASSENEINTEILUNG / ZERLEGUNG

Man spricht von einer Klasseneinteilung, sofern sicher gestellt werden kann, dass jedem Objekt aus der definierten Welt einer Klasse (Untermenge) zugeordnet werden kann.

<u>UND-Verknüpfung:</u>
Die UND-Verbindung zwischen jeder Klasse muss jeweils die leer Menge als Lösung haben. Man spricht dann von disjunkten Mengen.

<u>ODER-Verknüpfung:</u>
Die ODER-Verbindung zwischen allen Klassen muss zu einer Menge führen, die alle Objekte der definierten Ausgangsmenge enthält.

<u>Beispiel:</u> *Alphabet*

UND-Verknüpfung: $Konsonat \cap Vokal = \{\ \}$

ODER-Verknüpfung: $Konsonat \cup Vokal = Alphabet$

POTENZMENGE

Eine Potenzmenge ist eine Ansammlung von allen möglichen Teilmenge basierend auf einer beliebigen Menge A.

Da jedes Objekt der Ausgangsmenge zwei Möglichkeiten besitzt, nämlich zu der Teilmenge zu gehören oder nicht, besteht jede Potenzmenge aus 2^n Untermengen.

Die Teilmengen existieren von der Länge Null (leere Menge) bis zu der Länge *n* (Anzahl der Objekte in der Ausgangsmenge).

<u>Beispiel:</u> $A = \{a; b; c; d\}$

$$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \{\ \}; \\ \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \\ \{a;b\}; \{a;c\}; \{a;d\}; \{b;c\}; \{b;d\}; \{c;d\}; \\ \{a;b;c\}; \{a;b;d\}; \{a;c;d\}; \{b;c;d\}; \\ \{a;b;c;d\} \end{array} \right\} \quad 2^n = 2^4 = 16 \quad \text{Untermengen}$$

AUFGABEN

1) Welche der folgenden Aussagen über eine Potenzmenge $P(A)$ und einer Menge *A* sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

$a) A \in P(A)$ $\quad b) A \subset P(A)$ $\quad c) \{\ \} \in P(A)$ $\quad d) \{\ \} \subset P(A)$

$e) \{A\} \in P(A)$ $\quad f) \{A\} \subset P(A)$ $\quad g) \{\{\ \}\} \subset P(A)$ $\quad h) \{\{\ \}\} \in P(A)$

2) Bilden Sie die Potenzmenge basierend auf der Menge $A = \{\nabla; \infty; \pi\}$.

3) Beschreiben Sie alle ganzen Zahlen zwischen -5 und 10, die durch drei aber nicht durch 4 teilbar sind.

4) Definieren Sie die natürlichen Zahlen größer gleich vier und kleiner 50, die durch 4 und durch 7 teilbar sind.

5) Gegeben sei die Menge M aller Studierenden an der Hochschule Fulda in Form der Matrikelnummer. Gesucht ist die Menge der Studierenden, wo die Quersumme der Matrikelnummer größer 15 ist.

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

- Potenzmenge
- Kartesisches Produkt
- disjunkt
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- Euklidischer Vektorraum
- Klassen
- assoziativ
- invers
- Absorption
- neutral
- kommutativ
- idempotent
- distributiv
- imaginär
- De Morgan

VORKURS

17.09.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Zu welchen Zahlenmengen gehört jeder Bruch?
- ✓ Warum benötigt man die imaginäre Achse?
- ✓ Warum ist das kartesische Produkt nicht kommutativ?
- ✓ Wie macht man eine als Relation definierte Funktion umkehrbar?
- ✓ Wie entsteht der Euklidische Vektorraum?
- ✓ Welche Gesetze gibt es in der Arithmetik?
- ✓ Wie überprüft man eine Klasseneinteilung einer Menge A?
- ✓ Was versteht man unter einer Potenzmenge?

KOMPLEXE ZAHLEN I

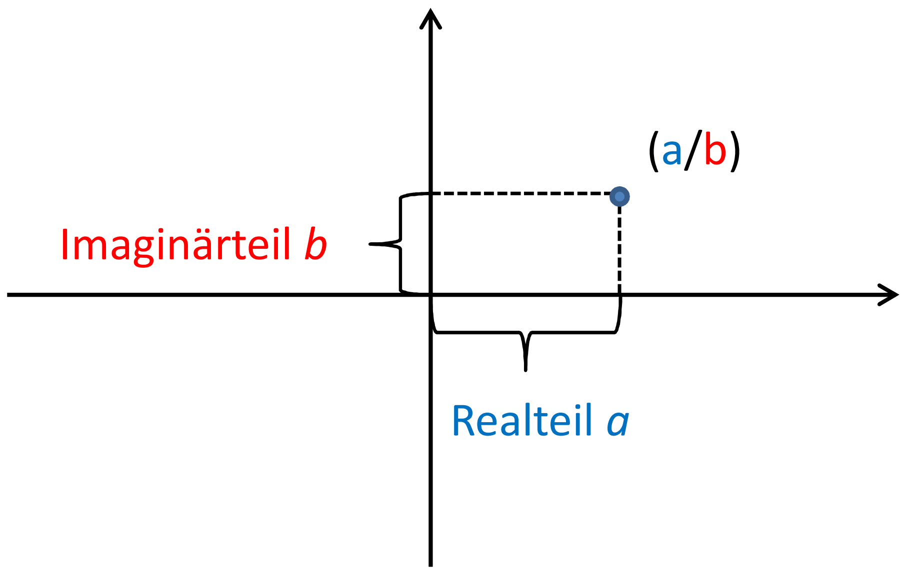
Jacques Hadamard (1865–1963)

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Aussagen über reelle Zahlen führt über komplexe Zahlen.

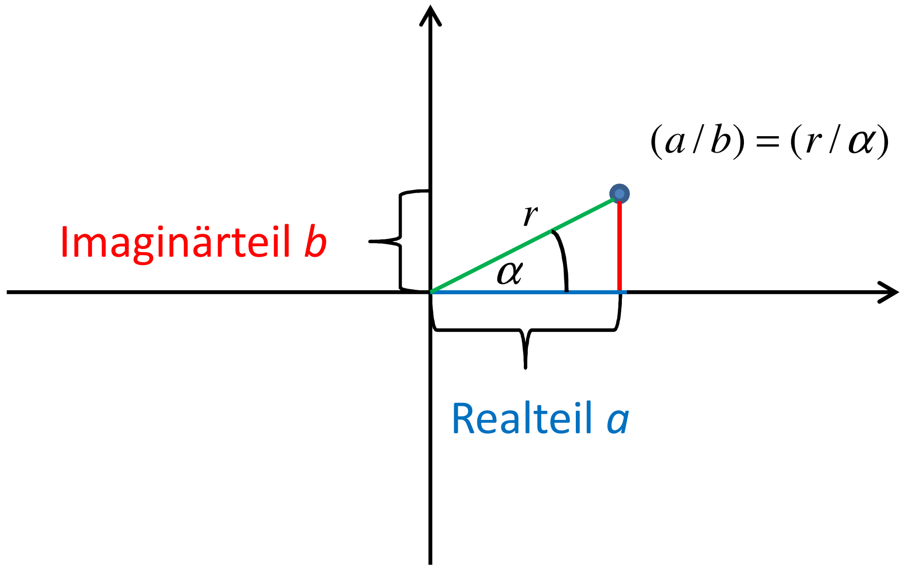
$$z = a + b \cdot i; i = \sqrt{-1}$$

Realteil

Imaginärteil



KOMPLEXE ZAHLEN II



a = Ankathete

b = Gegenkathete

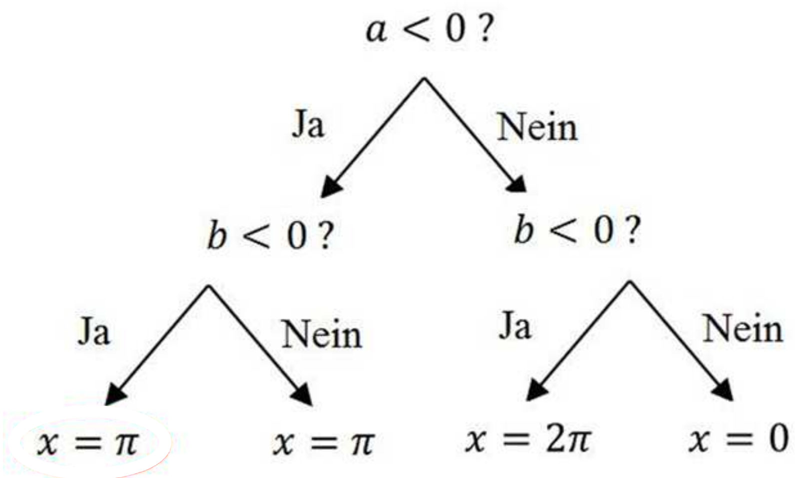
r = Hypothenuse

Betrag: $r=\sqrt{a^2+b^2}$

Argument: $\alpha = \arctan\frac{b}{a}+x \quad \begin{cases} a>0 \wedge b>0 \Rightarrow x=0\pi \\ a>0 \wedge b<0 \Rightarrow x=2\pi \\ a<0 \wedge b>0 \Rightarrow x=\pi \\ a<0 \wedge b<0 \Rightarrow x=\pi \end{cases}$

KOMPLEXE ZAHLEN III

Entscheidungsbaum für das Argument von $z = a + b \cdot i$



Anmerkung:
Wenn die komplexe Zahl direkt auf einer Achse liegt, also eine der Koordinaten null ist, müssen Sie für das Argument immer ein Vielfaches von 90° nutzen.

KOMPLEXE ZAHLEN III

Potenzen des Imaginärteils i^{EXP}:

$$i^{0+4\cdot n} = i^0 \cdot i^{4\cdot n} = 1 \cdot \left(i^4\right)^n = 1 \cdot 1^n = 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 0$$

$$i^{1+4\cdot n} = i^1 \cdot i^{4\cdot n} = i \cdot \left(i^4\right)^n = i \cdot 1^n = i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 1$$

$$i^{2+4\cdot n} = i^2 \cdot i^{4\cdot n} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \cdot \left(i^4\right)^n = (-1) \cdot 1^n = -1 \cdot 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 2$$

$$i^{3+4\cdot n} = i^3 \cdot i^{4\cdot n} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \cdot i \cdot \left(i^4\right)^n = (-i) \cdot 1^n = -i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 3$$

Beispiel:

$$(3+2i)+(7-5i) = (3+7)+(2-5)i = 10-3i$$

$$(3+2i)\cdot(7-5i) = (3\cdot 7)+(3\cdot(-5i))+(2i\cdot 7)+(2i\cdot(-5i)) = 21-15i+14i-10i^2 = 31-i$$

$$2i^3 \cdot (3+2i)^2 = -2i\cdot(9+12i+4i^2) = -2i\cdot(5+12i) = 24-10i$$

KOMPLEXE ZAHLEN IV

Darstellung einer komplexen Zahl:

✓ <u>Kartesische Darstellung:</u> $z = a + b \cdot i$

✓ <u>Trigonometrische Darstellung:</u> $z = r \cdot \left(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)\right)$

✓ <u>Exponentielle Darstellung:</u> $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$

Beispiel: $z = 3 - 4 \cdot i$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 360 \approx 307° \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 5 \cdot \left(\cos(307) + i \cdot \sin(307)\right) \\ z = 5 \cdot e^{i \cdot 307} \end{array}$$

KOMPLEXE ZAHLEN V

Die konjugiert komplexe Zahl:

Um den Imaginärteil einer komplexen Zahl zu beseitigen , wird mittels des 3. Binoms der Ausdruck erweitert (konjugiert komplexen Zahl).

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - \left(-b^2\right) = a^2 + b^2$$

Betrag: $z = 2 - 5i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 5i$

$$r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(2-5i)\cdot(2+5i)} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Division: $\frac{9-2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{27 - 6i - 9i + 2i^2}{3^2 - i^2} = \frac{25 - 15i}{10} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} i = 2{,}5 - 1{,}5i$

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels kartesischer Form an. Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

1) $(1-2i)^3 \cdot \left[(3-i) \cdot (2i+6) \cdot i\right]$

2) $\dfrac{3+2i}{4-i} + \dfrac{-12-3i}{2i-3}$

3) $(2+3i)^2 \cdot 2(1-2i)^2 \cdot i^{13}$

KOMPLEXE ZAHLEN VI

Die Potenz einer komplexe Zahl:

Kartesische Form: $(a+bi)^n = (a+bi)\cdot(a+bi)\cdot\cdots\cdot(a+bi)$

Berechnung via Binom oder Pascal'sche Dreieck

Trigonometrische Form: $\left[r\cdot\left(cos(\alpha)+i\cdot sin(\alpha)\right)\right]^n$

Berechnung mittels der Formel von de Moivre

$r^n\cdot\left(cos(n\cdot\alpha)+i\cdot sin(n\cdot\alpha)\right)$

Exponentielle Form: $\left[r\cdot e^{i\cdot\alpha}\right]^n$

Berechnung mittels der Potenzgesetze

$\Rightarrow r^n\cdot\left(e^{i\cdot\alpha}\right)^n = r^n\cdot e^{n\cdot(i\cdot\alpha)}$

KOMPLEXE ZAHLEN VII

Beispiel: $z^3 = (3-4i)^3,\ r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,\ \alpha = arc\ tan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi \approx 307°$

Kartesische Form:

$$(3-4i)^3 = (3-4i)^2 \cdot (3-4i)$$
$$(-7-24i) \cdot (3-4i)$$
$$-21 + 28i - 72i + 96i^2 = -117 - 44i$$

Trigonometrische Form:

$$\left[5 \cdot \left(cos(307°) + i \cdot sin(307°)\right)\right]^3$$
$$5^3 \cdot \left(cos(3 \cdot 307°) + i \cdot sin(3 \cdot 307°)\right)$$
$$125 \cdot \left(cos(201°) + i \cdot sin(201)\right)$$

Exponentielle Form:

$$\left[5 \cdot e^{i \cdot 307°}\right]^3$$
$$5^3 \cdot \left(e^{i \cdot 307°}\right)^3 = 125 \cdot e^{3 \cdot (307° \cdot i)} = 125 \cdot e^{921 \cdot i}$$

KOMPLEXE ZAHLEN VIII

Die Wurzel einer komplexe Zahl:

Während es beim Potenzieren einer komplexen Zahl nur eine Lösung gibt, entstehen beim Ziehen der n-ten Wurzel stets n-1 Lösungen.

Moivre'sche Formel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[cos\left(\frac{\alpha+2k\cdot\pi}{n}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\alpha+2k\cdot\pi}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$

Sobald $k = n$ gilt wiederholen sich die Lösungen

Beispiel:

$$z^4 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} \text{ mit } r = 1 \; und \, \alpha = \pi$$

$$k = 0{:}\; z_o = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$k = 1{:}\; z_1 = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)\right]$$

$$k = 2{:}\; z_2 = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)\right]$$

$$k = 3{:}\; z_3 = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)\right]$$

KOMPLEXE ZAHLEN IX

Die Wurzel einer komplexe Zahl:

Während es beim Potenzieren einer komplexen Zahl nur eine Lösung gibt, entstehen beim Ziehen der n-ten Wurzel stets n-1 Lösungen.

Polarform: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot e^{i\cdot(\alpha+2k\cdot\pi)}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\alpha+2k\cdot\pi}{n}}$

$k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$

Sobald $k = n$ gilt wiederholen sich die Lösungen

Beispiel: $z^4 = -1 \;\Rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$ mit $r = 1\ und\, \alpha = \pi$

$k = 0\colon\ z_o = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

$k = 1\colon\ z_1 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$

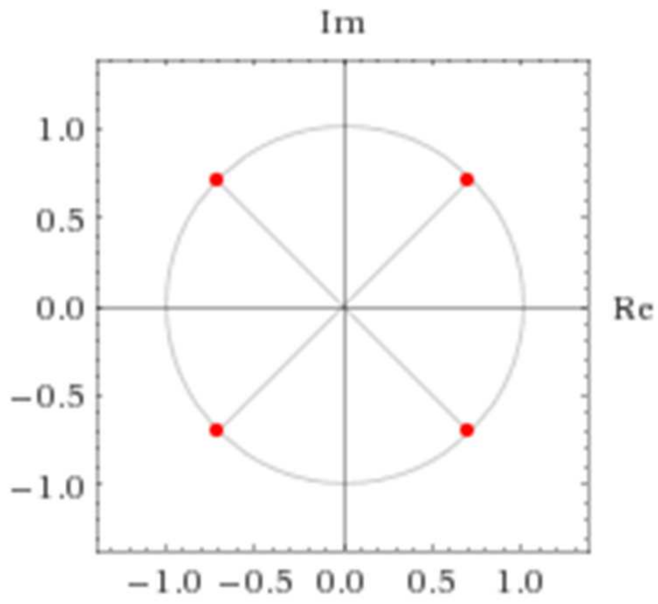
$k = 2\colon\ z_2 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}$

$k = 3\colon\ z_3 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}$

KOMPLEXE ZAHLEN X

Grafische Darstellung der Lösung zu $z^4 = -1$:

- Aufgrund des imaginären Raums, entspricht die Anzahl der Lösungen dem Grad der zu ziehenden Wurzel.



- Grafisch entsteht bei der Verbindung der Lösungspunkte ein Kreis, wobei der Radius identisch mit dem Betrag der komplexen ist.

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels exponentieller und trigonometrischer Form an.

Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

1. $\left(2i - \sqrt{3}\right)^4 \cdot (4 + 0{,}5i)^3$

2. $z^5 = 32i$

3. Bestimmen Sie die kartesische Form zu
   $z = 16 \cdot \left(cos(150°) + i \cdot sin(150°)\right)$
   auf zwei Arten.

DEG	0°	30°	45°	60°	90°
RAD	0π	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
SIN	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
COS	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
TAN	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

arcus

Argument

Imaginärteil

Betrag

kartesische Darstellung

Realteil

trigonometrische Darstellung

Erweiterung 3. Binom

exponentielle Darstellung

Eine handvoll S von Schreiber

$EXP \; mod \; 4 = ?$

VORKURS

18.09.2019

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wofür benötigt man eine imaginäre Achse?
- ✓ Wie wird eine komplexe Zahl definiert?
- ✓ Was versteht man unter dem Betrag / Argument?
- ✓ Worauf muss bei der Berechnung des Winkels geachtet werden?
- ✓ Was hat die Modulo-Operation mit den komplexen Zahlen zu tun?
- ✓ Welche Winkel haben komplexe Zahlen auf den Achsen?
- ✓ Welche Darstellungsformen hat eine komplexe Zahl?
- ✓ Auf welche Arten werden komplexe Zahlen dividiert?

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung als $z = a + bi$ an.

1) $(2i - 5) \cdot [(3i + 4) - 2 \cdot (i - 4)]$

2) $4 \cdot (i - 3) \cdot (3 + 1) - (i - 2) \cdot (5 + i)$

3) $4i^8 \cdot (4i - 2i^{11}) \cdot [(i^3 + 2i) \cdot (4i + 1)]$

4) $15i^{11} - 3i \cdot (2i^7 + 2i^8) + 6i \cdot (2i - 5i^{15} + 3i^6)$

5) $\dfrac{3-2i}{i-1} - \dfrac{3i+4}{1-2i} - \dfrac{3i+19}{10}$

6) $(-5i^{32} + 4i^{17})^3 - (4i^{19} + i^{46})^4$

KLAUSUR-AUFGABEN

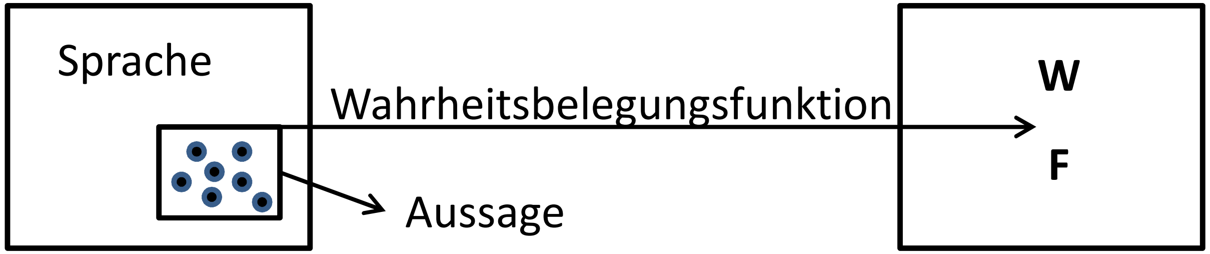
Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung als $z = a + bi$ an.

2015: $z = \frac{5i \cdot (3+9i)}{(3i+1)^2} - \frac{(4i-3)^2}{(1-3i)}$ $\qquad$ $z^2 - (6i-4) \cdot z = 12i + 9$

2014: $8 \cdot z = (2+i)^4 - (3-4i) \cdot (3+4i)$

2013: $z^3 = 2z^2 \cdot (2-3i) + 3z \cdot (3+4i)$ $\qquad$ $z = \frac{7}{20} i^3 \cdot [(3-2i^3)^4 - 1]$

AUSSAGENLOGIK



<u>Aussage:</u>
Eine Aussage ist ein Satz der eindeutig als wahr **oder** falsch klassifiziert werden kann.

<u>Aussageform:</u>
Eine Aussageform A(x) ist ein Satz der mindestens von einem flexiblen Zustand bzw. einer Variablen abhängig ist und dadurch zu einer Aussage wird.

<u>Wahrheitsbelegungsfunktion:</u>
Es handelt sich um eine einstellige Funktion, die einer beliebigen Aussage den Wert „wahr“ oder „falsch“ zuordnet.

<u>*Beispiel*</u>:
Wahre Aussage: $40 + 2 = 42$
Falsche Aussage: $\sqrt{-42} \in \Re$
Aussageform: $x + 42 = 0$

LOGISCHE OPERATOREN

P R I O R I T Ä T

Negation: $\neg$

$$\neg(W) = F$$
$$\neg(F) = W$$

einstellig

$=$

Konjunktion: $\wedge$

$\wedge$	W	F
W	W	F
F	F	F

Disjunktion: $\vee$

$\vee$	W	F
W	W	W
F	W	F

Subjunktion: $\rightarrow$

$\rightarrow$	W	F
W	W	F
F	W	W

Bijunktion: $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$	W	F
W	W	F
F	F	W

zweistellig

GESETZE

Kommutativgesetz:	$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
Assoziativgesetz:	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
Distributivgesetz:	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
De Morgan:	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
Absorption:	$a \wedge (a \vee b) = a$	$a \vee (a \wedge b) = a$
Idempotenz:	$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$
Neutralität:	$a \wedge W = a$	$a \vee F = a$
Übergewicht:	$a \wedge F = F$	$a \vee W = W$

ZUSAMMENHÄNGE

Tertium non datur: $a \vee \neg a = W$

Widerspruch: $a \wedge \neg a = F$

Doppelte Negation: $\neg(\neg a) = a$

Subjunktion: $a \to b = (\neg a \vee b)$

Bijunktion: $a \leftrightarrow b = ((a \to b) \wedge (b \to a))$

$a \leftrightarrow b = ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$

Kontraposition: $a \to b = (\neg b \to \neg a)$

BEGRIFFE

<u>Präfix (lat. prae „*vor*“ und fix „*fest*“):</u>
Ist in der deutschen Sprache eine sogenannte Vorsilbe und beschreibt in der Mathematik ein Objekt, dass sich vor einem Term o.ä. befindet.

Ein Präfix vor einer Einheit gibt z.B. Auskunft darüber mit welcher Zehnerpotenz zu multiplizieren ist ($1\ GB = 1\ GigaByte = 1 \cdot 10^9\ Byte$)

<u>Infix (lat. in „hinein“ und fix „*fest*“):</u>
Ein Infix steht also innerhalb eines Ausdruck.
Dadurch existieren die Operatoren der Arithmetik in der Infix-Notation ($73 - 42$)

<u>Postfix (lat. post „nach“ und fix „*fest*“):</u>
Ein Postfix steht also stets hinter einem Term oder Ausdruck.
So ist z.B. das Gleichheitszeichen ein Postfix dar ($73 - \mathrm{x} = 42$)

WAHRHEITSTABELLEN

In einer Wahrheitstabelle werden alle möglichen Szenarien einer Schaltung abgebildet und durchgespielt.

Die positiven Ergebnisse werden als Erfüllungsmenge der Aussage *E[A]* bezeichnet.

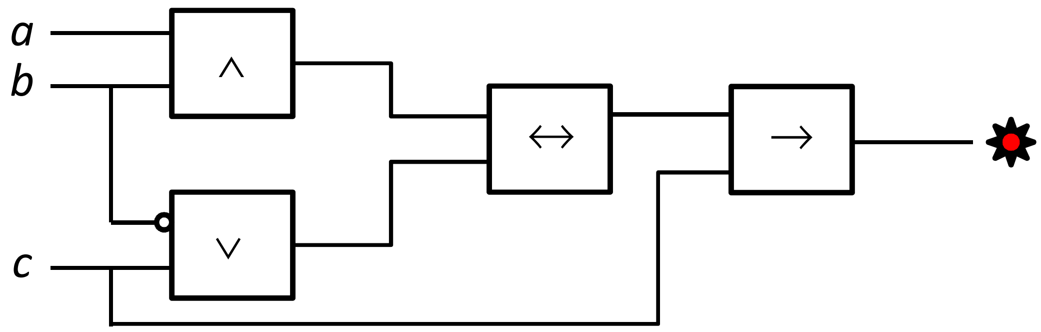
Mit *n* Eingängen können 2^n verschiedene Eingabemuster erzeugt werden, wobei in den jeweiligen Zeilen stets $2^{n-Zeilennummer}$ mal wechselnd WAHR bzw. FALSCH steht. Die folgenden Zeilen werden analog oder durch Halbierung der Muster gebildet.

<u>Beispiel:</u> *3 Eingabevariablen = 8 verschiedene Eingabemuster*

a	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**F**	**F**	**F**
b	**W**	**W**	**F**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**
c	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**
...								
...								
E[A]								

BEISPIEL EINER SCHALTUNG

Schaltung:



Wahrheitstabelle: $\left[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)\right] \rightarrow c$ $\qquad E[A] = Bool^3 \setminus \{(FWF)\}$

a	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**F**	**F**	**F**
b	**W**	**W**	**F**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**
c	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**
$a \wedge b$	W	W	F	F	F	F	F	F
$\neg b$	F	F	W	W	F	F	W	W
$\neg b \vee c$	W	F	W	W	W	F	W	W
$(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)$	W	F	F	F	F	W	F	F
$\left[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)\right] \rightarrow c$	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**W**	**W**

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die Erfüllungsmenge der folgenden Aussagenverbindung.

a) $A(p,q,r) := \big(p \to (q \vee r)\big) \wedge \neg(p \vee r) \to \neg p$

b) $A(p,q,r) := \neg(p \leftrightarrow (q \vee r)) \vee (p \to r \wedge q)$

2) Andreas, Benedikt, Carolin und Dora sind auf eine Party eingeladen:

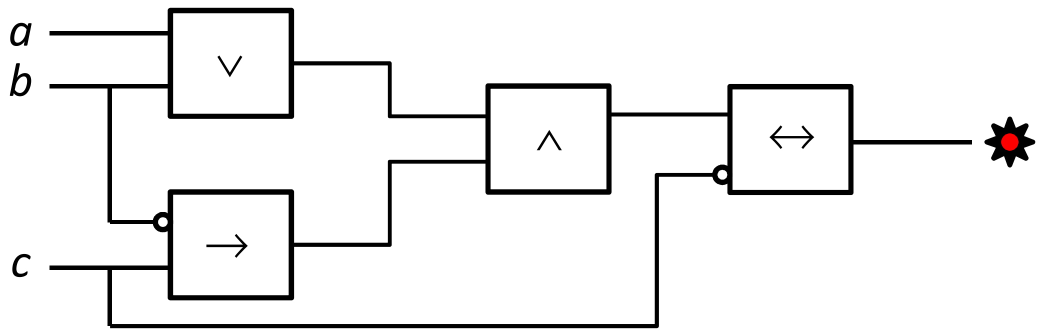
- ✓ Wenn Andreas geht, dann geht auch Benedikt.
- ✓ Carolin und Dora gehen nicht beide.
- ✓ Von Andreas und Dora gehen mindestens einer.
- ✓ Wenn Benedikt oder Dora geht, dann geht auch Carolin.

Wer geht auf die Party?

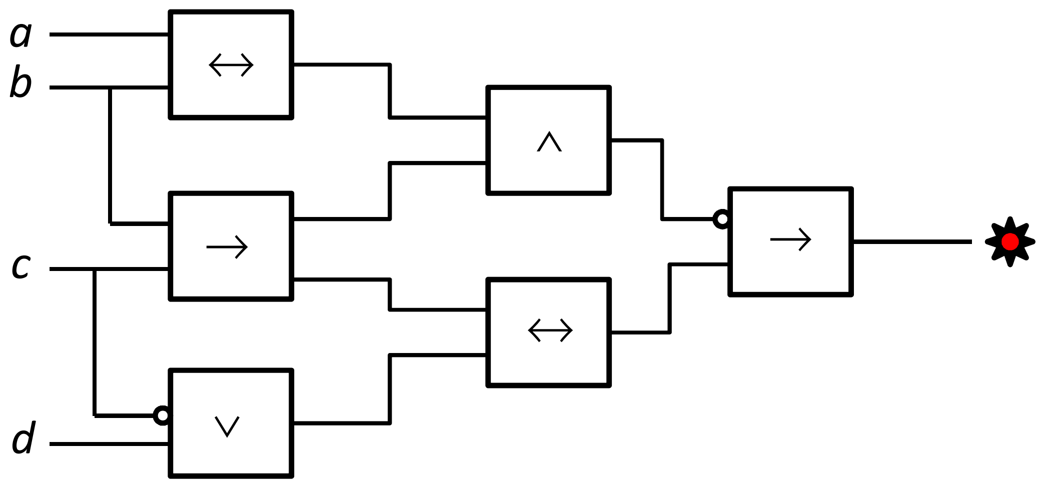
AUFGABEN

3) Geben Sie zu den folgenden Schaltungen die Erfüllungsmenge an.

a)



b)



Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

- Aussage
- Wahrheitsbelegungsfunktion
- Eingabemuster
- Aussageform
- Boolean
- Wahrheitstabelle
- $E[A] = BOOL^n$
- Disjunktion
- Konjunktion
- präfix, infix, postfix
- Tertium non datur
- Subjunktion
- Bijunktion

VORKURS

19.09.2019

Wiederholung

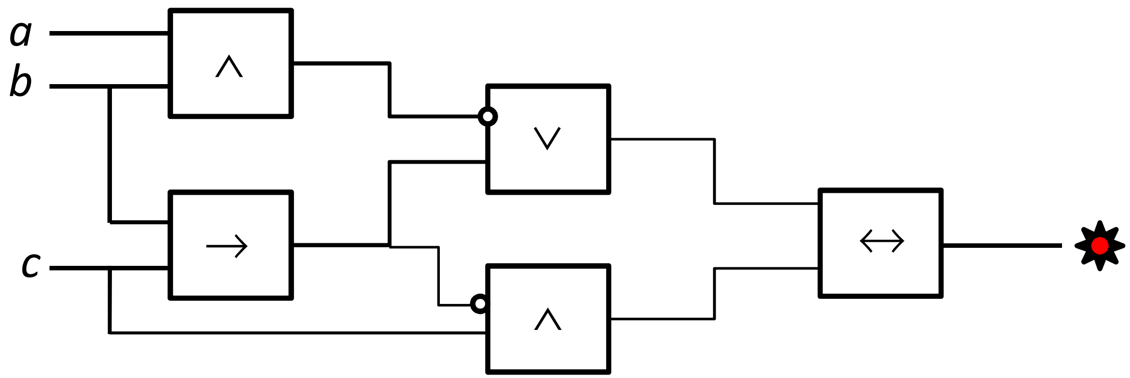
Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen Aussage und Aussageform?
- ✓ Was versteht man unter Sujunktion (Äquivalenzformel)?
- ✓ Was untersucht man bei der Bijunktion?
- ✓ Welche Operatoren stammen direkt aus der Mengenlehre?
- ✓ Wie erzeugt man alle möglichen Eingangsmuster einer Schaltung?
- ✓ Was untersucht man mit einer Wahrheitstabelle?
- ✓ Was beschreibt die Erfüllungsmenge einer Aussage?
- ✓ Wann benutzt man den Ausdruck Bool?

AUFGABEN

Geben Sie die Erfüllungsmenge an und ggf. die Aussage bzw. die Schaltung.

1)



2) $\neg(a \leftrightarrow b \vee c) \leftrightarrow c \wedge \neg a \rightarrow b$

3) $x \rightarrow \neg y \wedge z \leftrightarrow z \vee \neg x \rightarrow y$

FORMELKLASSEN

Je nach Art der Erfüllungsmenge kann der Ausdruck/ die Schaltung klassifiziert werden.

<u>Tautologie (allgemeingültig):</u>
Die Erfüllungsmenge der Aussage ist $Bool^n$ *, d.h. die Lampe brennt immer.*

Beispiel: $A(p,q) = p \wedge q \to p \Rightarrow E[A] = Bool^2$

<u>Kontingenz (erfüllbar):</u>
Die Anzahl der Erfüllungsmuster liegt in $[1;(n-1)]$*, d.h. die Lampe brennt manchmal.*

Beispiel: $A(a,b,c) = a \wedge (b \to \neg a \vee c) \leftrightarrow b \Rightarrow E[A] = \{(WWW);(FFW);(FFF)\}$

<u>Kontradiktion (ungültig):</u>
Die Erfüllungsmenge der Aussage ist $\{\ \}$ *, d.h. die Lampe brennt nie.*

Beispiel: $A(x,y) = (x \wedge \neg x) \wedge (y \vee \neg y \to x \leftrightarrow y) \Rightarrow E[A] = \{\ \}$

IMPLIKATION / ÄQUIVALENZ

Implikation (Folgerung):
Soll ein Ausdruck 2 die Folgerung aus einem Ausdruck 1 sein $(A_1 \to A_2)$,wird mittels Wahrheitstabelle die Subjunktion geprüft.
Stellt diese **Subjunktion** eine **Tautologie** dar, so handelt es sich um eine **Implikation**.

$$A = (A_1 \to A_2) : E[A] = Bool^n \quad \text{also} \quad A_1 \Rightarrow A_2$$

Äquivalenz (Gleichheit):
Soll ein Ausdruck 1 gleichwertig mit einem Ausdruck 2 sein $(A_1 \leftrightarrow A_2)$,wird mittels Wahrheitstabelle die Bijunktion geprüft.
Stellt diese **Bijunktion** eine **Tautologie** dar, so handelt es sich um eine **Äquivalenz**.

$$A = (A_1 \leftrightarrow A_2) : E[A] = Bool^n \quad \text{also} \quad A_1 \Leftrightarrow A_2$$

AUFGABEN

Bestimmen Sie die Erfüllungsmenge der folgenden Aussagenverbindung.
Geben Sie anschließend an, um welche Formelklasse es sich handelt (Begründung).

1) $A(p,q,r) := p \rightarrow (q \vee r) \leftrightarrow \neg(q \vee r) \rightarrow \neg p$

2) $A(p,q,r) := \neg(p \rightarrow (q \vee r)) \vee (q \wedge r)$

3) $A(x,y,z) := (x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) \rightarrow z \leftrightarrow x \vee y \rightarrow z$

Prüfen Sie mittels Wahrheitstabelle, ob die Aussage $T_1(x,y,z) = x \wedge y \rightarrow z$ eine Folgerung aus $T_2(x,y,z) = x \wedge (y \rightarrow z)$ darstellt und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Prüfen Sie mittels Wahrheitstabelle, ob die beiden Aussagen $A_1(a,b,c) := a \wedge b \rightarrow c$ und $A_2(a,b,c) := a \wedge (b \rightarrow c)$ identisch sind.

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Formelklassen

Äquivalenz

Kontradiktion

Kontingenz

Tautologie

Implikation

Formalisierung

VORKURS

20.09.2018

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie erzeugt man eine Formel aus einer Schaltung?
- ✓ Was versteht man unter einer Formelklasse?
- ✓ Wann spricht man von einer allgemeingültigen Aussage?
- ✓ Wann existiert ein Widerspruch?
- ✓ Was bedeutet die Kontingenz?
- ✓ Wann hat man eine Folgerung?
- ✓ Wozu benötigt man die Äquivalenz?
- ✓ Welche Tricks kann man in der Wahrheitstabelle anwenden?

AUFGABEN

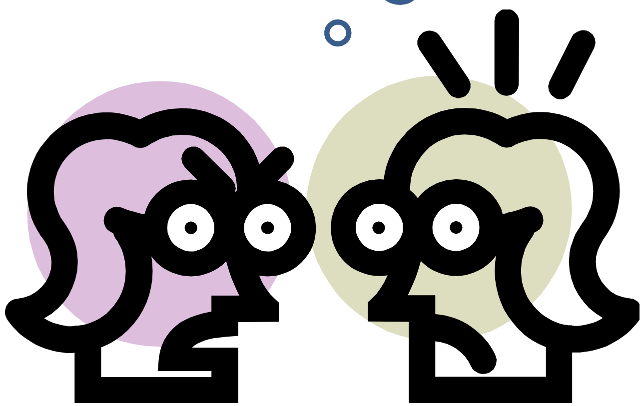
1. Geben Sie die Erfüllungsmenge folgender Aussage an und begründen Sie die zugrundeliegende Formelklasse. $A(p,q,r) = (r \vee (p \to q)) \wedge (\neg r \vee q)$

2. Prüfen Sie ob die beiden Aussagen $T_1(a,b,c) = a \wedge b \to c$ und $T_2(a,b,c) = (a \to c) \vee (b \to c)$ identisch sind. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

3. Gegeben sind die beiden Ausdrücke $A_1(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z)$ und $A_2(x,y,z) = (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge y)$
   Ist die Subjunktion von A_2 auf A_1 allgemeingültig?

ARITHMETIK

Die Klammer sprach: „Zuerst komm ich,
Gefolgt vom Punkt und dann der Strich“



AUFGABEN

1) $(b + a - (c - 3 - d + b - (a + c + (b - d))))$

2) $16 - (3x + y - \frac{1}{2}z)(\frac{1}{2}z - 3x + y)$

3) $x - (2 + (3 - y + z - (2 + x - (y - z))))$

4) $42 - (\frac{2}{y} + 2x - z) \cdot (z - 2x + \frac{2}{y})$

5) $-a + (3 - (b + 5 - (c - 2 + (a + b)))) - (c - 4)$

6) $-2 \cdot (z - x) - (1 + 2(4 + y - (z + 2x)) - 3(y - 2x))$

7) $-4a + 2 \cdot (a - (3 + b - 2 \cdot (a - 4b + 2) - 3 \cdot (a - b)) + 12b)$

BINOMISCHE FORMELN I

1. Binom: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binom: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

<u>Methodik:</u>

1. Quadrierung der linken Variablen
2. Das Doppelte von linker mal rechter Variablen
3. Quadrierung der rechter Variablen

Beispiel:

$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3y) + (-3y)^2$$
$$(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$
$$(-4x^3 + 2y^2)^2 = 16x^6 - 16x^3y^2 + 4y^4$$

BINOMISCHE FORMELN II

3. Binom: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Beispiel:

$$(-3x+2y)\cdot(-3x-2y)=9x^2+6xy-6xy-4y^2$$

oder einfacher

$$(-3x+2y)\cdot(-3x-2y)=9x^2-4y^2$$

Anwendungsbeispiele:

- Entfernen einer Wurzel aus einer Summe
- Entfernen des Imaginäranteils einer komplexen Zahl (konjugiert komplexe Zahl)

AUFGABEN

1) $(2y+\frac{1}{2}x)(x-4y)-8(\frac{1}{4}x+y)^2$

2) $(2b - 3a)(3a - 2b) - (2a - b)^2$

3) $\dfrac{5-2\sqrt{x}}{3+\sqrt{2x}}$

4) $\dfrac{2x+5\sqrt{x-1}}{3\sqrt{x}-7}$

machen Sie den Nenner rational

5) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x-8}{3\sqrt{x}-6}\right)$

ZUSATZAUFGABEN

Ü 4.2.26 *Dividiere:* **a)** $(3ax - 4ay + 3bx - 4by) : (a + b)$;
b) $(6u^2 - 4u^2v + 5uv + 2uv^2 - 4v^2) : (2u - v)$;
c) $(18x^2 - 15x^2y + 10xy^2 - 8y^2) : (3x - 2y)$;
d) $(4x^2 - 3x^2y + 3xy^2 - 4xy + 5xz - 3xyz - yz + z^2) : (x - y + z)$.

Ergänzende Aufgaben:

Ü 4.2.27 *Löse die Klammern auf und fasse gegebenenfalls zusammen:*
a) $3a + (2b - 2a)$; **b)** $4x - (3x + y)$; **c)** $-2u + (3v + 4u)$;
d) $d - e - (d - e)$; **e)** $3c - 4a - (2a - 3c)$; **f)** $5a - (5a + b)$;
g) $4x - (3y + (z - 4x) - z)$; **h)** $5u - 6v - (3w - (6v - 5u + 3w))$;
j) $a - (b - (a + b - (c - 2a + b) + c))$;
k) $2z - (x - (y + x - (z + x) - z))$.

Ü 4.2.28 *Setze Klammern an den gekennzeichneten Stellen:*
a) $a +' c - d'$; **b)** $x -' u + v'$; **c)** $f -' e - d'$; **d)** $a -' c -' d - e' - f'$.

Ü 4.2.29 *Multipliziere aus:*
a) $2u(3a - 4c)$; **b)** $6y(2d + 3c)$; **c)** $5a(x - y)$; **d)** $(-3y)(-x - u)$.

Ü 4.2.30 *Klammere aus:*
a) $28xz - 14xy + 35ux$; **b)** $48abc - 12ab + 36ac$;
c) $9bc + 27abc + 18bcd$; **d)** $15uvw + 18uv - 33uvx$.

ZUSATZAUFGABEN

Ü 4.2.31 *Multipliziere aus:*

a) $(2x-3z)(4a-2b)$; **b)** $(a+b+c)(d-e)$;
c) $(2a-3b+4c)(6u-5v+8w)$; **d)** $(5ab-6c)(x+y-z)$;
e) $(2x-3z)(4x+5z)$; **f)** $(5a-b)(3a-2b)$;
g) $(2u-2v+3w)(u+4v-6w)$; **h)** $(3a-b)(6x-2y)(3x-b)$;
j) $(x-3)(x+2)(x-1)$; **k)** $(2-x+y)(y-3)(2x+2)$.

Ü 4.2.32 *Klammere aus:*

a) $2ux-uy+6vx-3vy$; **b)** $10ac+6bc+5ad+3bd$;
c) $4ax-12ay-2cx+6cy$; **d)** $au+az+dv-du-av-dz$;
e) $2ax+3by-2ay-3bx+cx-cy$;
f) $ux-vy-wz+vx-wx-uy+wy+uz+vz$;
g) $ab-ay-2bx+3au-6ux+2xy$; **h)** $bx-by-ax+ay$;
j) $3xz+6xy-2y-z$; **k)** $8abcx-2cx-4ab+1$.

Ü 4.2.33 *Dividiere:*

a) $(12uv-18uw+6ux):3u$; **b)** $(7ax+49ay):7a$;
c) $(24abc+36acd-18acx):3ac$.

Ü 4.2.34 *Dividiere:*

a) $(6au-4av-6bu+4bv):(a-b)$;
b) $(12a^2-8a^2b+29ab-6ab^2+15b^2):(4a+3b)$;
c) $(18u^2-3u^2v+2uv^2-8v^2):(3u-2v)$;

ZUSATZAUFGABEN

Ü 4.0.1 *Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:*
a) $u - 2v - (3u - (2v + 4u))$; **b)** $x - (y - (x - y))$.

Ü 4.0.2 *Klammern Sie aus:* **a)** $12bcg - 20abc + 8bcd$;
b) $6au - 2av + 6bu - 2bv$; **c)** $ax - ay + bx - by$.

Ü 4.0.3 *Multiplizieren Sie aus:* **a)** $2c(3a - 4b)$; **b)** $(2a - 3b)(4x - y)$;
c) $(a + b - c)(a - b + c)$.

Ü 4.0.4 *Dividieren Sie:* **a)** $(12acx - 8cy) : 4c$;
b) $(3ax - 2ay + 3bx - 2by) : (a + b)$;
c) $(x^3 + 2x^2y + 3xy + 4xy^2 + 2y^2) : (x + 2y)$.

Ü 4.2.5 *Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:*
a) $2a + (3b + c)$; **b)** $d - 2e - (f - 2g)$; **c)** $4a - 2b - (4a - 3b)$;
d) $5e + 3x + (3x - 4e)$; **e)** $2u - (u - v) - v$; **f)** $3a + b + (a - 2b)$.

Ü 4.2.7 *Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:*
a) $2x - 4y - (2x - (x + 3y))$; **b)** $g + (2f - (g + 2f))$;
c) $u - (v - (2u + (u - v) + v) - u)$; **d)** $a + b - (2a - (b + a) - b)$.

ZUSATZAUFGABEN

Ü 4.2.9 *Setzen Sie an den durch ' gekennzeichneten Stellen Klammern:*
a) $x+'y+z+v'$; b) $u-'v-w+x'$; c) $x-'u+v+w'$; d) $x-'y+'u-v'+z'$.

Ü 4.2.14 *Klammern Sie aus:*
a) $5ag+20ab+15ac$; b) $49xz-14xu+21xy$;
c) $8def-4deg+11ade$; d) $6ac-12abc+36acg-18xcx$.

Ü 4.2.17 *Multiplizieren Sie aus:*
a) $(x+2y)(u-3v)$; b) $(2a-3b)(4c-5d)$;
c) $(9a+4b-3c)(6u-3x+4z)$; d) $(4x-2y)(3u+2v)(a+b)$.

Ü 4.2.19 *Multiplizieren Sie aus:*
a) $(4a+3b)(8a-6b)$; b) $(5u-3v)(2u+4v)$; c) $(x-y+z)(x+y-z)$.

Ü 4.2.21 *Klammern Sie aus:*
a) $8au-6av+4bu-3bv$; b) $ax-2ay-2bx+4by$;
c) $12uv-3uy+4vx-xy$; d) $2ab-2bc+2au-2av-2cu+2cv$;
e) $14ax+14az-9by+6bx-21ay-2cx+3cy+6bz-2cz$.

Ü 4.2.24 *Dividieren Sie:*
a) $(24ax-12ay):6a$; b) $(28ux-35vx+14xy):7x$.

PASCAL‘SCHE DREIECK I

Exponent (n)							$(a+b)^n$						
0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

Elemente in der 7. Zeile:

Ganz links: 1

Nebenan: 7, denn $1+6=7$

Nebenan: 21, denn 6+$15=21$

Nebenan: 35, denn $15+20=35$

Somit ergibt sich für die 7. Zeile die folgende Struktur:

$$1-7-21-35-35-21-7-1$$

PASCAL'SCHE DREIECK II

Methode des Pascall'schen Dreiecks:

1. Koeffizienten:

Sie gehen an die richtige Zeile des Pascall'schen Dreiecks und schreiben die Koeffizienten mit einem »+« versehen ab.

2. Linke Variable:

Jetzt nehmen Sie den linken Teil der Summe und notieren diesen **in Klammern** hinter die Koeffizienten des ersten Schritts. Anschließend schreiben Sie von **links** anfangend den **höchsten** Exponenten **minus eins** bis zum Exponenten Null über die linke Variable.

3. Rechte Variable:

Nun benutzen Sie den rechten Teil der Summe. Diesen Ausdruck schreiben Sie ebenfalls **in Klammern** hinter den Term aus Schritt zwei. Weil es ja die rechte Variable ist, fangen Sie jetzt auf der **rechten Seite** mit dem **höchsten** Exponenten an und enden auf der linken Seite mit der Null.

Schon sind Sie fertig und können den entstandenen Ausdruck berechnen und zusammenfassen.

AUFGABEN

1) $(2x+\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{6}+x)^2$

2) $(2x-\frac{1}{4})^4-(4-x)^3$

3) $\left(2x^2-\frac{0{,}5}{x}\right)^4-\frac{1-16x^3}{16x^4}$

4) $z=(2+i)^5$

5) $z=(2i-0{,}5)^4$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

- Kommutativ
- Distributiv
- Assoziativ
- neutral
- invers
- 1. – 3. Binom
- Pascal‘sche Dreieck
- Störprinzip

VORKURS

23.09.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wo liegt der Unterschied zwischen dem 1. und 2. Binom?
- ✓ Wie nutzt man das 1./2. Binom zum Kopfrechnen?
- ✓ Für was kann man das 3. Binom nutzen?
- ✓ Was bedeutet das Störprinzip in der Arithmetik?
- ✓ Was bewirkt ein Parameter in einer Funktionenschar?
- ✓ Was ist eine Tautologie in der Arithmetik?
- ✓ Wie hängt der Koeffizient mit der Variablen zusammen?
- ✓ Was ist die Nullform einer Gleichung?

AUFGABEN

a) $(2x - 0{,}1y)^2$

b) $(ax + 3y)^2$

c) $(2x - 0{,}5xy)(0{,}5xy + 2x)$

d) $\left(2cd - \frac{3}{c}d\right)^2$

e) $\left(\frac{x}{4} + 2xy\right)^2$

f) $\left(\frac{1}{3}x - 0{,}1y\right)\left(0{,}1y + \frac{1}{3}x\right)$

g) $(2i - 1)^4$

h) $(0{,}4i + 8)^5$

i) $\left(\frac{1}{4}i - 0{,}2x\right)\left(0{,}2x + \frac{1}{4}i\right)$

1) $3 \cdot (2y + \frac{1}{3}x)(\frac{1}{3}x - 2y) - 4 \cdot (\frac{2}{y}x + 3y)^2$

2) $(3b - ab)(3b + ba) - (a - 2b)^2$

3) $\frac{3\sqrt{x} + 2}{1 + \sqrt{3x}}$

4) $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{3x} - 4}$

(3) und 4)) machen Sie den Nenner rational

5) $\lim\limits_{x \to -3}\left(\frac{2x+6}{6 - 2\sqrt{3-2x}}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to 6}\left(\frac{x^2 - 4x - 12}{2\sqrt{2x+4} - 8}\right)$

TEILBARKEIT

Eine ganze Zahl *a* ist dann durch eine ganze Zahl *b* teilbar, wenn das Ergebnis *q* der Division ebenfalls eine ganzen Zahlen ist, so dass man die Teilbarkeitsrelation wie folgt definieren kann:

$$| = \{(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in Z \times Z \mid b = q \cdot a; q \in Z\}$$

In der Mathematik nutzt man anstelle von $(a,b) \in |$ primär die Infix-Notation $a|b$ (gesprochen: *a* teilt *b*).

Daraus ergeben sich die folgenden Regeln / Zusammenhänge:

- Transitivität: $a|b \ \wedge b|c \quad \rightarrow a|c$
- Kürzbarkeit: $c \cdot a|c \cdot b \quad \rightarrow a|b; c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
- Produktregel: $a|b \ \wedge c|d \quad \rightarrow a \cdot c|b \cdot d$
- Linearität: $a|b_1 \ \wedge a|b_2 \quad \rightarrow a|m \cdot b_1 + n \cdot b_2; m,n \in \mathbb{Z}$

DIVISION MIT REST

Bei einer ganzzahligen Division mit Rest werden zwei Zahlen $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{a} \neq 0$ betrachtet. Bei der Division entstehen immer zwei eindeutige Zahlen $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathbb{Z}$, so dass die größere Zahl *b* stets als *Produkt + Rest* beschrieben werden kann.

$$b = q \cdot a + r \quad mit \quad 0 \leq q < |a|$$

Als ganzzahlige Division von *b* und *a* erhält man demzufolge *q* und es gilt: $\frac{b}{Z^a} = q$

Diese Definition des Rests haben wir bereits auf Seite 7 mit der Modulo-Operation kennen gelernt. Bei der Modulo-Operation erhalten wir nur den Rest der Division.

Beispiel: $a = 8; b = 115$

$$115 = 112 + 3 = 14 \cdot 8 + 3 \Rightarrow q = 14, r = 3$$

Es gilt demzufolge: $\frac{115}{Z^8} = 14$ und $115 \; mod \; 8 = 3$

GRÖßTER GEMEINSAMER TEILER

ggT: größter gemeinsamer Teiler:

Beim größten gemeinsamen Teiler sucht man die größtmögliche natürliche Zahl, die zwei oder mehr Zahlen ganzzahlig teilt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $d|a$ und $d|b$, wodurch *d* ein gemeinsamer Teiler von *a* und *b* sein muss.
Wenn jetzt für jeden anderen gemeinsamen Teiler *c* von *a* und *b* gilt, dass c$|d$, dann ist *d* auch der größte gemeinsame Teiler von *a* und *b*:

$$d = ggT(a, b)$$

Haben zwei Zahlen als größten gemeinsamen Teiler nur die eins, so dass $ggT(a, b) = 1$ gilt, so sind die Zahlen teilerfremd.

KLEINSTES GEMEINSAMES VIELFACHES

kgV: kleinstes gemeinsames Vielfaches:

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Pendant zum zuvor definierten ggT.

Es wird hier eine möglichst kleine natürliche Zahl gesucht, die das Vielfache zweier Zahlen darstellt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $a|d$ und $b|d$, wodurch *d* ein gemeinsames Vielfaches von *a* und *b* sein muss.
Wenn jetzt für jedes andere gemeinsame Vielfache *c* von *a* und *b* gilt, dass $d|c$, dann ist *d* auch das kleinste gemeinsame Vielfache von *a* und *b*:

$$d = kgV(a, b)$$

Für die Berechnungen des ggT(a,b) und auch kgV(a,b) nutzt man u.a. das Verfahren der Primfaktorzerlegung.

PRIMFAKTORZERLEGUNG I

Primzahl:

Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist eine Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist: $P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \dots\}$

Primfaktorzerlegung:

Eine natürliche Zahl $p > 1$ kann als Produkt von Primzahlen dargestellt werden. Sortiert man diese Primfaktoren, so erhält man die kanonische Darstellung.

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$$

Für die Zerlegung faktorisiert man die Ausgangszahl und startet bei der kleinsten Primzahl und fass anschließend gleiche Faktoren zusammen.

$$504 = 2 \cdot 252 = 2 \cdot 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2^3 \cdot 63$$
$$63 = 3 \cdot 21 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$$

$$\Rightarrow 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

PRIMFAKTORZERLEGUNG II

Anwendung auf ggT(a,b) und kgV(a,b):

Im ersten Schritt zerlegt man die zu betrachtenden Zahlen in deren Primfaktoren.

$$160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^5 \cdot 5$$
$$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$$

ggT - Bestimmung:

Zur Berechnung des ggT fasst man die gleichen Primfaktoren als Produkt zusammen:

$$\Rightarrow ggT(160{,}144) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

kgV - Bestimmung:

Zur Berechnung des kgV nimmt man die am häufigsten vorkommenden Primfaktoren und setzt diese zu einem Produkt zusammen:

$$\Rightarrow kgV(160{,}144) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 32 \cdot 9 \cdot 5 = 1.440$$

AUFGABEN

1. Zerlegen Sie die gegebenen Zahlen im ersten Schritt in deren Primfaktoren und bestimmen anschließend den größten gemeinsamen Teiler ggT sowie das kleinste gemeinsame Vielfache kgV.

   a) $a = 3.528 \wedge b = 3.780$

   b) $a = 776.160 \wedge b = 2.494.800$

   c) $a = 1.008 \wedge b = 1.080 \wedge c = 2.940$

EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, kann man den ggT(a,b) einfach bestimmen.

Es gilt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$

1. Berechnung der ganzzahligen Division mit Rest: $b = q \cdot a + r \quad mit \quad 0 \leq q < |a|$

2.1. Ist $r \neq 0$, dann ersetze $b \coloneqq a$ und $a \coloneqq r$ und Starte wieder bei 1.

2.2. Ist $r = 0$, dann ist a der gesuchte Wert vom ggT(a,b).

Beispiel: $ggT(1.264\,,\ 616)$

$$\begin{aligned} 1.264 \quad &= 2 \cdot 616 + 32 \\ 616 \quad &= 19 \cdot 32 + 8 \\ 32 \quad &= 4 \cdot 8 + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ggT(1.264\,, 616) = 8$$

AUFGABEN

1. Wenden Sie bei den folgenden Aufgaben den Euklidischen Algorithmus an und bestimmen somit den ggT.

a) $a = 840 \wedge b = 980$

b) $a = 975 \wedge b = 2.340$

c) $a = 96.096 \wedge b = 1.092$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Grenzwert

Asymptote

ggT

Hyperbel

kgV

Faustregel Grenzwerte

Primfaktorzerlegung

Nullfolge

Art der Annäherung

VORKURS

24.09.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was wird durch das +/- im Exponenten eines Grenzwerts beschrieben?
- ✓ Was versteht man unter einer Asymptote?
- ✓ Wann nutzt man das Pascal'sche Dreieck?
- ✓ Warum nennt man es auch Koeffizientenstruktur?
- ✓ Wie funktioniert die Primfaktorzerlegung?
- ✓ Was ist das kgV und was das ggT?
- ✓ Wie definiert man die Teilbarkeit (ohne Modulo)?
- ✓ Was macht der Euklidische Algorithmus?

AUFGABEN

1) $2 \cdot (2x - 0{,}5y)^5$

2) $(3i - 2)^4 - 2 \cdot (i + 3)^2 \cdot (1 - 2i)^4$

3) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{6 + 2x}$

4) $f(x) = \dfrac{2 - 4x}{2x - 8}$

5) Bestimmen Sie den Definitions- sowie den Wertebereich und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

a) $f(x) = 4 - \dfrac{3}{2 - x}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{6 + 3x} + 3$

6) Bestimmen Sie das kgV und ggT mittels der Primfaktorzerlegung und zusätzlich den ggT mittels Euklid.

a) $(360; 108)$

b) $(1260; 1350)$

POLYNOMDIVISION

1) **Arithmetik:**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $-a+(3-(b+5-(c-2+(a+b))))-(c-4)$

b) $(2y+\frac{1}{2}x)(x-4y)-8(\frac{1}{4}x+y)^2$

2) $(2a^2-5ab+10ac+2b^2+12c^2-11bc):(a-2b+3c)$

$(8x^2y^2-14xy^2-6xyz+3y^2-3xy^2z+9yz+2x^2y^2z):(2xy-3y)$

3) $x^3-2x^2-5x+6=0$

$x^4-x^3-7x^2+x+6=0$

$2x^3-22x=8x^2-60$

$x^4+3x^3-13x^2-27x+36=0$

BRUCHRECHNUNG I

KgV: Kleinste gemeinsame Vielfache

Hier versucht man durch Primfaktorenzerlegung eine Zahl zu finden, die durch die gegebenen Zahlen teilbar sind.
Dies benötigen Sie um Brüche **gleichnamig** zu machen.

$$\frac{5}{56} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{5 \cdot (3 \cdot 5)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{75}{840}$$

$$\frac{11}{60} = \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{11 \cdot (2 \cdot 7)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{154}{840}$$

ggT: größter gemeinsamer Teiler:

Auch hier wird durch die Primzahlen eine Zahl gesucht. Nur diesmal müssen die gegebenen Zahlen durch das Produkt daraus teilbar sein.
Diese Methode wenden wir beim **Kürzen** an.

$$\frac{660}{1848} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$$

BRUCHRECHNUNG II

Hauptnenner:
Damit Brüche addiert bzw. subtrahiert werden können, müssen diese im ersten Schritt auf den gleichen Nenner (Hauptnenner) gebracht werden, um abschließend die Zähler zusammen zu fassen.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{8}=\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{12}{12}-\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{3}=\frac{16+36-15}{24}=\frac{37}{24}$$

Doppelbruch:
Bei einem Doppelbruch handelt es sich im Grunde genommen um eine Division von zwei Bruchtermen. Zur Berechnung werden der Zähler / Nenner im ersten Schritt in einen reinen Bruch umgewandelt und abschließend wird der Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert.

$$\frac{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}+\frac{4}{6}}=\frac{\frac{12-10}{15}}{\frac{2+12}{18}}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{14}{18}}=\frac{2}{15}\cdot\frac{18}{14}=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 2\cdot 7}=\frac{6}{35}$$

BRUCHRECHNUNG III

Eine rationale, endliche Zahl wird in einen Bruch verwandelt, in dem man den Teil hinter dem Komma als separaten Bruch darstellt und diesen dann mit dem ganzen Teil der Zahl addiert.

$$8{,}375 = 8 + 0{,}375 = 8 + \frac{375}{1000} = 8 + \frac{3}{8} = 8\frac{3}{8} = \frac{67}{8}$$

Handelt es sich um eine periodische Zahl, so wird die Zahl vor der Periode getrennt und diese dann in einen Bruch verwandelt und mit dem Rest der Zahl addiert.

$$4{,}166666666\ldots = 4{,}1\overline{6} = 4{,}1 + 0{,}0\overline{6} = \frac{41}{10} + \frac{6}{90} = \frac{125}{30}$$

Kürzen Sie die Brüche soweit als möglich und geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an?

$\frac{48}{1188}$ b) $\frac{312}{54}$ c) $\frac{1688}{792}$

Wandeln Sie die gegebenen Dezimalzahlen in einen Bruch um und Kürzen diesen wenn möglich.

$2{,}0\overline{5}$ b) $8{,}0\overline{12}$ c) $1{,}625$

Bestimmen Sie das Ergebnis der Aufgaben, in dem Sie die Brüche erweitern und zusammenfassen.

$$\frac{2}{5}-\frac{5}{3}+\frac{7}{2}+2 \qquad \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{5}\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right) \qquad \left(\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\right)\div\left(3+\frac{7}{4}\right)$$

Fassen Sie den Doppelbruch soweit als möglich zusammen.

$$\frac{\frac{4}{7}-\frac{5}{6}}{\frac{9}{14}+\frac{5}{3}} \qquad \frac{\frac{2}{5}+\frac{4}{3}}{\frac{4}{5}-\frac{10}{13}} \qquad \frac{\frac{2}{9}+\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}$$

1) Berechnen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Binomischen Formeln.

$$(2x - 4y)^2 \cdot (2y + x)^2$$

$$48 \cdot \left(0{,}5x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{4}x - 2y\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x + 2y\right)$$

$$12 \cdot \left(-\frac{2}{3} + 6x\right)^2 \cdot \left((3 - 4x) - 2(5 - 2x)\right)$$

2) Entfernen Sie den Wurzelterm aus dem Nenner.

$$\frac{x-2}{5-2\cdot\sqrt{3x-5}} \qquad \frac{\sqrt{x}}{3\cdot\sqrt{2x}+\sqrt{4-x}}$$

3) Bestimmen Sie die Lösung der Aufgaben mit Hilfe des Pascall'schenDreiecks

$$(2x - y)^5 \left(-\frac{1}{2}x - 4\right)^4$$

Ü 4.5.25 Kürze: a) $\frac{49a^2-14ac+c^2}{14a-2c}$; b) $\frac{28u^2-63v^2}{12u^2+36uv+27v^2}$; c) $\frac{9x^2-25v^2}{3x+5v}$;

d) $\frac{4+4c+c^2}{c+2}$; e) $\frac{9u^2-6u+1}{9u^2-1}$; f) $\frac{27ad+18bd}{81a^2-36b^2}$; g) $\frac{x+x^2}{x^2-1}$;

h) $\frac{ax^2-ay^2}{2ax-3ay}$.

Ü 4.5.26 Addiere: a) $\frac{5}{6}+\frac{4}{15}-\frac{1}{10}$; b) $\frac{3}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{4}{21}$;

c) $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$; d) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2$; e) $\frac{u-v}{uv}-\frac{u-w}{uw}+\frac{v-w}{vw}$; f) $\frac{a-b}{a+b}-\frac{a}{a-b}$;

g) $\frac{1}{c+2}-\frac{1}{3a}+\frac{2b+1}{6ab}$; h) $\frac{2u^2-13v^2}{(2u-5v)^2}-\frac{2u+5v}{4u-10v}$; j) $\frac{4x-5}{2x-2}-\frac{6x+1}{3x-4}$;

k) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$; l) $\frac{x}{4x-8}-\frac{2x}{3x+6}+\frac{2x^2-9x}{5x^2-20}$

Ü 4.5.27 Berechne: a) $\frac{2}{7}:\frac{8}{21}$; b) $\frac{19}{27}:\frac{38}{63}$; c) $\frac{28ac}{9bd}:\frac{7ab}{12cd}$

d) $\frac{4xy}{7z}:\frac{8xy}{21z}$; e) $\frac{4u^2-16v^2}{3(u+v)}:\frac{2u-4v}{3u+6v}$.

Ü 4.5.28 Vereinfache: a) $\frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$; b) $\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}}$; c) $\frac{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}}{1-\frac{a}{a-b}}$.

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Polynomdivision

Satz von Vieta

differenzierbar

L‘Hospital

Linearfaktor

$f(x)$

stetig

Dominanzprinzip

$f''(x)$

$f'(x)$

Nullstelle

VORKURS

25.09.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie funktioniert die Polynomdivision?
- ✓ Was ist ein Linearfaktor?
- ✓ Wie addieren / subtrahieren Sie Brüche?
- ✓ Wie kann man einen gemischten Bruch multiplizieren?
- ✓ Wie lösen Sie einen Doppelbruch auf?
- ✓ Wie kann man eine Bruchgleichung lösen?
- ✓ Wofür nutzt man kgT und ggV?
- ✓ Woran erkennt man eine periodische Zahl?

1) $x^3 - 4x^2 + 30 = 11x$ $\qquad$ $x^4 - 2x^2 \cdot (3x+8) + 54x + 63 = 0$

2) $\dfrac{\dfrac{2}{9}+\dfrac{4}{15}}{\dfrac{4}{3}-0{,}7}$ $\qquad$ $\dfrac{\dfrac{3x}{4y}-\dfrac{5}{3z}}{\dfrac{5x}{6yz}+\dfrac{3z}{2x}}$

3) $\dfrac{2}{5x}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{12}-1\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{15x}-0{,}9$ $\qquad$ $x^2 \cdot (x-5) \cdot (x+5) = -12 \cdot (x+3)$

4) **Bruchrechnung (8 Punkte):**

a) $3-\dfrac{2x+3y}{x+v}-\dfrac{x^2-y^2}{(x+v)^2}$ $\qquad$ b) $\dfrac{-\dfrac{0{,}5}{5}-\dfrac{1}{2yx}}{\dfrac{xy}{5}+2+\dfrac{5}{xy}}$

a) $\dfrac{2u^2-2uv}{u^2-v^2}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{u}$ $\qquad$ b) $\dfrac{\dfrac{a}{3}+2+\dfrac{3}{a}}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2a}}$

AUFGABEN

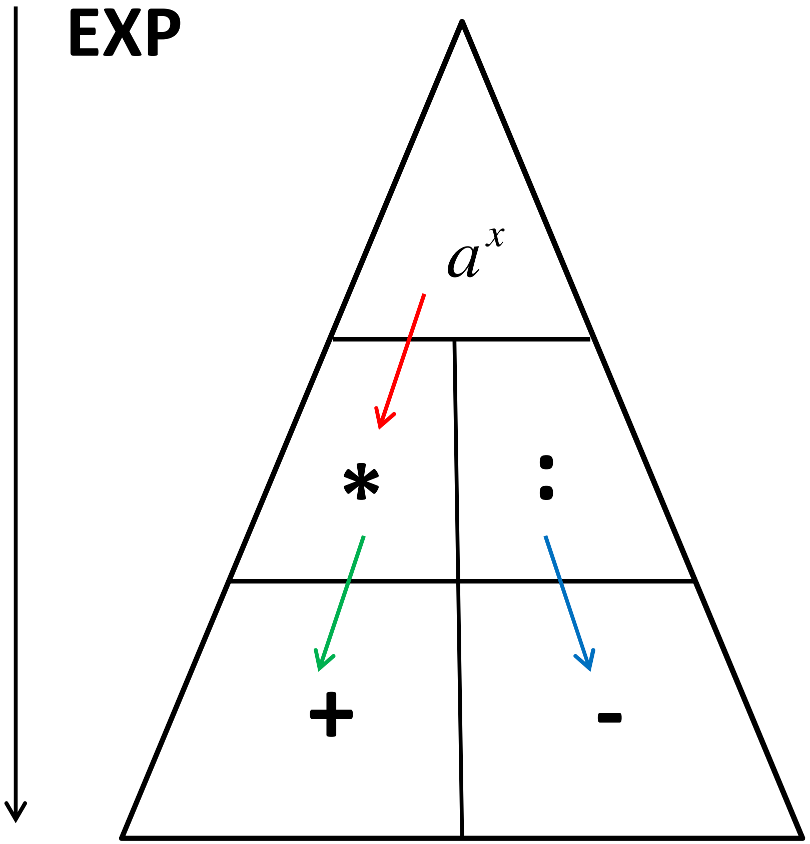
1) $\dfrac{\sqrt{x}-3x}{2\sqrt{x}-5}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{y-3}+2x}{\sqrt{y+2}-3x}$ $\qquad$ $\dfrac{3a+4}{2\sqrt{a-2}+3\sqrt{5-2a}}$

2) $\dfrac{4i-3}{2+i}$ $\qquad$ $\dfrac{5i+3}{1-3i}$ $\qquad$ $\dfrac{7i-5}{4i-3}$

3) $z = 2\cdot\dfrac{5i}{3i-4} - \dfrac{6i-4}{2-i} + \dfrac{1}{5}i$

4) $(2a-ab)^4$ $\qquad$ $\left(\dfrac{1}{2}x-2y\right)^5$ $\qquad$ $\left(4\dfrac{ab}{c}+0{,}5\dfrac{c}{b}\right)^4$

POTENZGESETZE



$$\left(x^3\right)^4 = x^{3\cdot 4} = x^{12}$$

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$$

$$\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$$

EIGENSCHAFTEN VON POTENZEN

Wichtige Zusammenhänge für die Potenzberechnung mit rationalem Exponenten:

<u>Polynom:</u>
Der höchste natürliche Exponent bestimmt den Grad des Polynoms $x^n + a \cdot x^{n-1} + ... + z \cdot x^0$

Beispiel: $x^5 - 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 12$ *Polynom vom Grade 5*

<u>Wurzel:</u>
Der Grad einer Wurzel steht immer im Nenner des Exponenten $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Beispiel: $\sqrt[3]{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

<u>Brüche:</u>
Ein negativer Exponent wird durch einen Positionswechsel positiv $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Beispiel: $\left(\frac{2}{x^2}\right)^{-2} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$

AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

1) $\sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^6 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}$

2) $\dfrac{(8u^2v^{-2}w)^4}{(81r^{-3}s^{-2}t^3)^2} : \dfrac{(3^4r^{-3}s^4t^3)^{-2}}{(2^4u^3v^{-4}w^{-2})^{-3}}$

3) $\dfrac{\sqrt[k]{a^{2-k}}}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{3k+4}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt[k]{a}}{\left(\sqrt[k]{a^2}\right)^{k+3}}\right)^{-2}$

4) $\sqrt{\dfrac{y^{-2} \cdot \left(x \cdot z^3\right)^5}{x^{-3} \cdot y^4 \cdot z^7}}$

5) $\dfrac{(5ab^{-3}c^2)^3}{(2^{-3}x^2y^0)^{-2}} : \dfrac{(4^{-1}a^{-2}b^0c^3)^2}{(25xy^{-3})^{-2}}$

6) $\left[\dfrac{\sqrt[2x]{n^{3x-2}}}{\sqrt[2x]{n^{4x-4}}} \cdot \left(\sqrt[2x]{n}\right)^{5x-2}\right]^3$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{x^3} = 125$

b) $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^2 = 1024$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{16}{x^2}} = 0{,}25$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

I) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 9}$

II) $g(x) = 5 \cdot \left(2x - 8\right)^{-2}$

III) $h(x) = \left(x^2 - 4\right)^2$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Grad einer Wurzel

Potenzen

Hierarchie der Mathematik

Tangente

Sekante

$y = m \cdot x + b$

Differenzenquotient

Achsenabschnitt

Steigungsdreieck

Doppelbruch

VORKURS

26.09.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was bedeutet ein negativer Exponent?
- ✓ Wie kann man den Grad einer Wurzel noch darstellen?
- ✓ Wie werden Potenzen potenziert?
- ✓ Was bewirkt eine Null im Exponenten?
- ✓ Wann kann man Potenzen addieren / subtrahieren?
- ✓ Wie lösen Sie verschachtelte Wurzelausdrücke?
- ✓ Was verstehen Sie unter der Hierarchie der Mathematik?
- ✓ Was ist ein Polynom vom Grade n?

AUFGABEN

1) $\left(2x^2-\sqrt{x}\right)^4-\left(\frac{1}{2x}+x^3\right)^2$

2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{y^5}}\cdot\left(y^3\right)^2:\sqrt[3]{y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{y^6}}$

3) $\left[\sqrt{x}\cdot\left(x^4-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)-\frac{1}{x^2}\cdot\left(\left(x^3\right)^2+\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^3\right)\right]:\frac{1}{x^2}$

4) $\dfrac{\frac{1}{x^2}\cdot\left(x^3\right)^2\cdot\left(\sqrt[5]{x^4}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{\left(x^2\right)^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}}\cdot\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^{-6}}$

OPERATION / GEGENOPERATION

Im Bereich der Arithmetik wird durch Bildung der abhängigen Gegenoperation stets das neutrale Element erzeugt (Multiplikation: 1 und Addition: 0).

<u>Lineare Gleichung:</u>
Mittels einfacher Gegenoperationen und den zugehörigen neutralen Elementen wird eine Gleichung nach der Unbekannten freigestellt.

Beispiel: $3\cdot x-5=4 \Leftrightarrow 3\cdot x-5+5=4+5 \Leftrightarrow 3\cdot x+0=9 \qquad |+5$

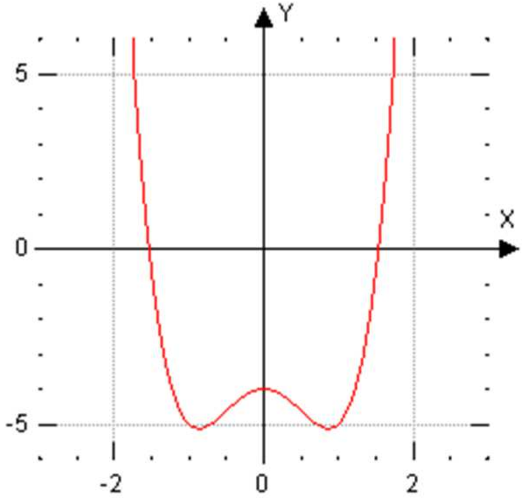
$$3\cdot x+0=9 \Leftrightarrow 3\cdot\frac{1}{3}\cdot x+0=9\cdot\frac{1}{3}=1\cdot x+0=3 \Leftrightarrow x=3 \qquad |:3$$

<u>Potenzgleichung:</u>
Nach Überführung des Terms in einen reinen Potenzausdruck wird der Exponent mittels elementarer Umformungen zum neutralen Element 1 umgewandelt.

Beispiel: $\sqrt[3]{x^2}=4 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}=4 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3} \Leftrightarrow x^1=\sqrt{64} \Rightarrow x=\pm 8$

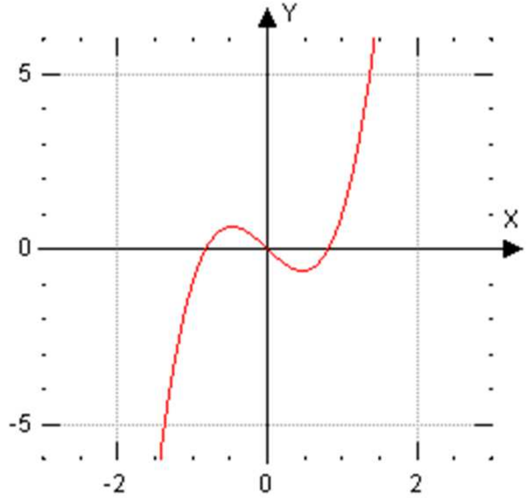
FUNKTIONSGRAPHEN I

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4$$



- Achsensymmetrie
- Ganzrationales Polynom (Grad 4)

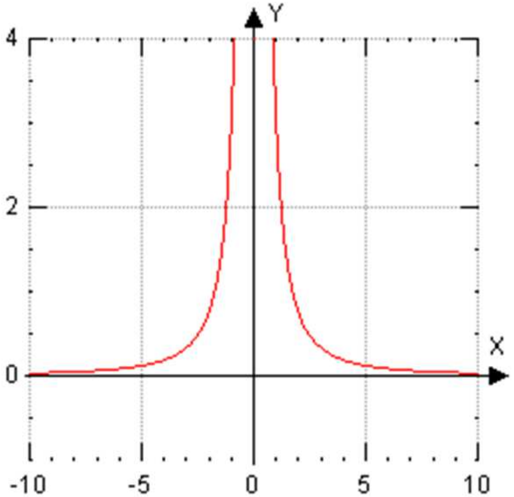
$$f(x) = 3x^3 - 2x$$



- Punktsymmetrie
- Ganzrationales Polynom (Grad 3)

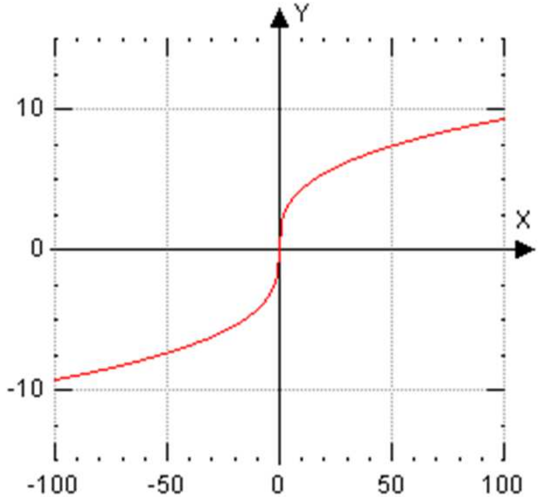
FUNKTIONSGRAPHEN II

$$f(x) = 3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$$



- Achsensymmetrie
- Hyperbelfunktion

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{x}$$



- Punktsymmetrie
- Wurzelfunktion

DEFINTIONS-/ WERTEBEREICH

Definitionsbereich:
Alle Zahlen, die in einem Ausdruck/ Term **eingesetzt** werden dürfen, werden mittels Mengeneigenschaften in Abhängigkeit der zugehörigen Variablen beschrieben.

- Ein **Polynom** vom Grade n ist stets für alle reellen Zahlen definiert.
- Eine **Wurzel** darf nun aus positiven Termen inkl. der NULL gezogen werden.
- Bei **Brüchen** ist darauf zu achten, dass der Nenner nicht NULL wird.

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{2-x}; D = \{x \in \Re \mid x \leq 2\}$ $\quad g(x) = \frac{x}{x+3}; D = \Re \setminus \{-3\}$

Wertebereich:
Die Zahlen, die durch einen Ausdruck/ Term berechnet werden können, ergeben den Wertebereich einer Funktion (y-Achse).

- Mit **geradem** Exponenten können nicht alle reellen Zahlen abgebildet werden.
- Mit **ungeradem** Exponenten werden alle reellen Zahlen erreicht.
- Bei **Brüchen/ Wurzeln** muss auf Ausnahmen geachtet werden (Definitionsbereich).

Beispiel: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2; W = \{y \in \Re \mid y \geq 2\}$ $\quad g(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}; W = \Re \setminus \{0\}$

AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

1) $\sqrt[3]{\sqrt{a^4 \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{a}} \cdot a^2}$

2) $\dfrac{3(2x^{-2}y^{-3})^2}{4(3a^3b^{-2})^3} \cdot \dfrac{8(3a^4b^{-3})^2}{9(2x^{-1}y^{-2})^3}$

3) $\dfrac{\dfrac{42}{\sqrt[n]{x^{10}}}}{\dfrac{\sqrt[2n]{x^{4n-6}}}{\left(\sqrt[n]{x^2}\right)^{3-2n}}} : \left(\dfrac{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{2n+5}}{\sqrt[\frac{n}{2}]{x^{6-n}}}\right)^{-2}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

a) $\left(\sqrt[12]{x^6}\right)^3 = 64$

b) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-4} = \dfrac{16}{81}$

c) $\sqrt{\sqrt[5]{x^4}} = \left(\dfrac{5}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^2$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

I) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{x-2}}$

II) $g(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 7x + 12\right)^{-5}$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Punktsymmetrie

Operation

Gegenoperation

Wertebereich

Achsensymmetrie

Definitionsbereich

Arten der Hyperbelfunktionen

Arten der Wurzelfunktionen

VORKURS

27.09.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was bedeutet der Begriff Gegenoperation?
- ✓ Wie Lösen Sie eine Gleichung mit einem höheren Operator?
- ✓ Wann sprechen Sie von einer Funktion?
- ✓ Auf welcher Achse wird der Wertebereich abgetragen?
- ✓ Was darf hinter einem Logarithmus nie stehen?
- ✓ Welche Einschränkungen gibt es in der Mathematik noch?
- ✓ Welche Arten der Symmetrie können Funktionen besitzen?
- ✓ Was ist eine Hyperbel und welche Varianten gibt es?

Wiederholung

Diese Vokabeln sollten Sie kennen und erklären können:

TRANSITIV	DISJUNKT	TAUTOLOGIE
DE MORGAN	IMPLIKATION	ANTISYMMETRIE
REFLEXIV	ZERLEGUNG	FUNKTION
DOPPELBRUCH	KONTRADIKTION	DISTRIBUTIV
BIJUNKTION	EXPONENT	BINOM

AUFGABEN

a) $$\frac{-\frac{0{,}5}{5}-\frac{1}{2yx}}{\frac{xy}{5}+2+\frac{5}{xy}}$$

b) $$\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{\sqrt{x}\cdot x^5}}}{x^2\cdot\sqrt[6]{x^5\cdot\sqrt[3]{x^2}}}\cdot\sqrt[9]{x}$$

c) $$\sqrt[3k]{\left(z^{k-3}\right)^6}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{\sqrt[k]{z^3}}\right)^{3-2k}}{\sqrt[4k]{z^{4k-12}}}$$

d) $$\frac{9\cdot\left(0{,}5\cdot x^2y^{-2}z\right)^4}{54\cdot\left(4\cdot x^{-2}y^3z^{-2}\right)^{-3}}:\frac{36\cdot\left(2\cdot x^2y^5z^{-4}\right)^2}{16\cdot\left(3\cdot x^4y^3z^{-4}\right)^3}$$

DEFINITION EINES LOGARITHMUS

Der Logarithmus dient zur Berechnung eines variablen Ausdrucks im Exponenten.

Es gilt:

$$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}}$$

<u>10er-Logarithmus:</u>

Ein Logarithmus ohne Angabe einer Basis ist immer zur Basis 10. $\log x = \log_{10} x$

Beispiel: $\log 10.000 = \log_{10} 10^4 = 4$

<u>Logarithmus naturalis:</u>

Der Logarithmus zur Basis *e* ist der natürliche Logarithmus. $\ln x = \log_e x$

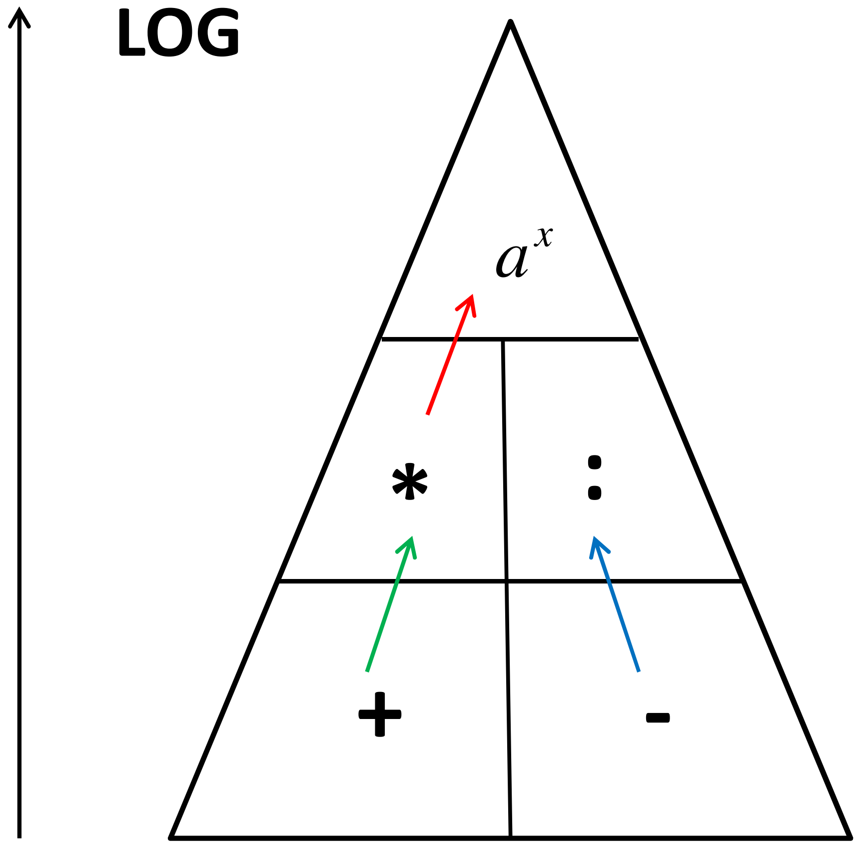
Beispiel: $\ln 42 = \log_e 42 = 3{,}737$

<u>Logarithmus dualis:</u>

Ein Logarithmus zur Basis 2 nennt man dualis. $ld(x) = \log_2 x$

Beispiel: $ld(32) = \log_2 2^5 = 5$

LOGARITHMUS-GESETZE



$$\boxed{3 \cdot \log 4 = \log 4^3 = \log 64}$$

$$\boxed{\log 2 + \log 3 = \log 2 \cdot 3 = \log 6}$$

$$\boxed{\log 8 - \log 2 = \log \frac{8}{2} = \log 4}$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $3\cdot\log(x-y)+\log(x+y)-\frac{1}{2}\log(x-y)^4$

3) $\log\sqrt[5]{\frac{x^3\cdot y^2}{3\cdot(x+y^2)}}$

2) $2\ln 2x-3\ln 2+4\ln\sqrt{x}+2\ln\frac{4}{x^2}$

4) $\ln\left(\frac{2\cdot\sqrt{a-2b}}{c^2\cdot\sqrt[4]{d}}\right)^3$

5) $16^{ld\sqrt{3}}+1.000^{\log 3}-\sqrt[4]{e}^{2\ln 25}-2\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\log\frac{1}{100}+3ld\frac{1}{8}$

6) $\left(e^4\right)^{\ln 2}+0{,}1ld1024-\log\sqrt{10.000}+0{,}01^{\log\frac{1}{3}}-\left(\frac{2}{16}\right)^{-ld3}+6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

LOG - Definition

10-er Logarithmus

Logarithmus naturalis

Logarithmus dualis

LOG - Gesetze

Methode beim Zusammenfassen

LOG - Eigenschaften

LOG - Schätzwert

VORKURS

30.09.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann spricht man von einer Exponentialfunktion?
- ✓ Was sagt Ihnen der Wachstumsfaktor?
- ✓ Was bedeutet Halbwertszeit?
- ✓ Was können Sie durch die Art des Logarithmus erkennen?
- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen LOG und LN?
- ✓ Wie lautet der Definitionsbereich von Log(x-1)?
- ✓ Wie lautet die Umkehrfunktion von LD(x)?
- ✓ Aus welchen 3 Schritten besteht das Lösen von Log-Ausdrücken?

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

1) Ein Kapital von 2000 EURO wird bei einer vierteljährlichen Verzinsung zu 2% zehn Jahre lang auf eine Bank eingezahlt.
   a) Wie hoch ist der Kontostand nach den 10 Jahren?
   b) Wie hoch wäre der Zinssatz bei einer jährlichen Verzinsung?
   c) Wie lange lag das Geld auf der Bank bei einem Endbetrag von 9.750,88 EURO?

2) Ein Gartenteich mit einem Inhalt von 1000 Litern hat ein kleines Loch, wodurch er wöchentlich 5% Inhalt verliert.
   a) Wie viel cm³ sind nach einem Jahr noch vorhanden?
   b) Nach wie vielen Tagen sind weniger als 50% in dem Teich?

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

3) $5 \cdot \log(2x) + 4 \cdot \log(\sqrt{0{,}5x}) - 0{,}5 \cdot \log(16x^4) - 2 \cdot \log(0{,}25)$

4) $2 \cdot \ln(3a^2) - 6 \cdot \ln(\sqrt[3]{2a^4}) + \frac{1}{3} \cdot \ln(27(a^2)^6) - 4 \cdot \ln\left(\frac{2}{a}\right)$

OPERATION UND GEGENOPERATION

Die zu einem Logarithmusausdruck zugehörige Gegenoperation ist stets ein Exponentialoperator, wodurch sich beide neutralisieren.
Die Zusammenhänge ergeben sich wie folgt:

$$\boxed{\log 10^{\Psi} = 10^{\log \Psi} = \Psi} \boxed{\ln e^{\Omega} = e^{\ln \Omega} = \Omega} \boxed{ld\, 2^{\Theta} = 2^{ld \Theta} = \Theta}$$

Aufgrund dieser Vereinfachungen, muss die zugehörige Basis bzw. der Exponent im ersten Schritt mittels exponentieller/ logarithmischer Gesetze passend umgeformt werden.

Beispiel:

$$\log \frac{1}{1000} - 4 \cdot \ln \sqrt{e} + \frac{1}{2} \cdot ld 16 + 0{,}1^{\log 0{,}25} + \left(\frac{1}{e^2}\right)^{\ln \frac{1}{3}} - 8^{ld 3}$$

$$\log 10^{-3} - 4 \cdot \ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot ld\, 2^4 + 10^{(-1) \cdot \log \frac{1}{4}} + e^{(-2) \cdot \ln \frac{1}{3}} - 2^{3 \cdot ld 3}$$

$$-3 - 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 3^3 = -3 - 2 + 2 + 4 + 9 - 27 = -17$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $\log\frac{1}{100}-\sqrt{e}^{\ln 4}+4^{ld 3}-2ld0{,}25$

2) $100^{\log 3}-\ln\frac{1}{e^2}+0{,}5ld16-e^{-3\ln\frac{1}{2}}$

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{ld 2}-6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}+\frac{1}{4}ld64-\frac{1}{2}\log\frac{1}{1000}+\sqrt[3]{e}^{\ln 27}$

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\ln\frac{1}{9}}+100^{\log\frac{1}{2^{-2}}}-16^{\frac{1}{2}ld 4}+2\log 0{,}001-3\ln\frac{1}{e^3}+\frac{1}{4}ld\frac{1}{256}$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Wachstumsfunktion

Zerfallsfunktion

Halbwertszeit

reduzierter Prozentsatz

vermehrter Prozentsatz

unterjährige Verzinsung

Operation / Gegenoperation

Basistransformation

VORKURS

01.10.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Durch welchen Punkt verläuft jede Exponentialfunktion (Warum)?
- ✓ Worin besteht der Unterschied zwischen Ergebnis und Lösung?
- ✓ Welchen Einfluss hat die Basis auf eine Exponentialfunktion?
- ✓ Was bewirkt das Addieren einer Konstanten zu einer Funktion?
- ✓ Was bedeutet Operation <-> Gegenoperation?
- ✓ Wie machen Sie die Basis zum Logarithmus passend?
- ✓ Wie neutralisieren Sie einen Logarithmus?
- ✓ Welche Gesetze der Potenz- und Logarithmenrechnung nutzen Sie?

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $$6\ln\sqrt[3]{e^2} - \frac{8}{e^{2\ln 0,5}} - \left(\frac{1}{2}e^{\ln 3^2} - \ln\frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{8}{\ln e^2} + e^{2\ln 3}$$

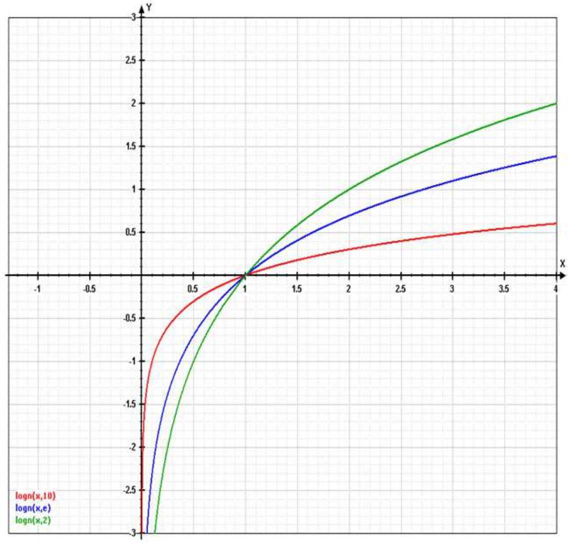
2) $$3\ln e^5 - 2\cdot\left(e^{2\ln 2} + \ln\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) + \frac{10}{e^{\ln\sqrt{4}}} + 0,5\cdot e^{\ln 3}$$

3) $$\frac{1}{6}\cdot ld\,2^3 + 3\cdot e^{2\cdot\ln 0,5} - \log\sqrt{10} + 4\cdot\left(2^{4\cdot ld\frac{1}{2}} - 8\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{e}}\right) - 4\cdot 10^{\frac{1}{4}\cdot\log 256}$$

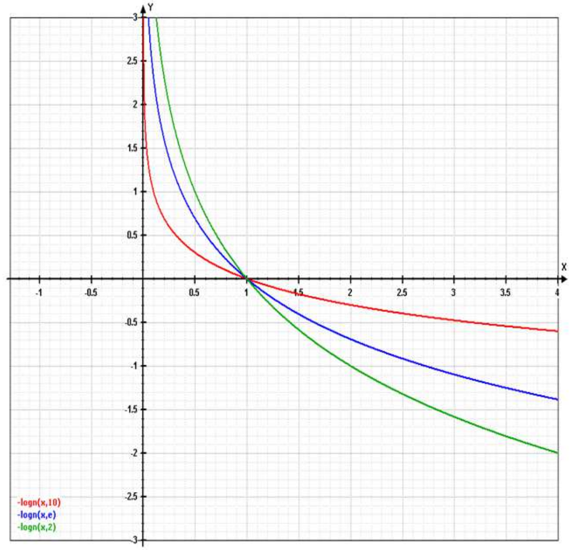
4) $$\frac{2}{3}\cdot\left(\log 1000 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{e^{\ln 0,5}} + 2^{3+ld\,3} - (10^2)^{\log 3} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)^2 - 4\cdot ld\sqrt{2}$$

FUNKTIONSGRAPHEN

Positiver Logarithmus:



Negativer Logarithmus:



- ➢Ausschließlich positive Steigung
- ➢Ausschließlich negative Steigung

- ➢Gemeinsamer Punkt: (1/0)
- ➢Je größer die Basis, desto flacher ab x=1
- ➢Je größer die Basis, desto steiler vor x=1

DEFINITIONS-/ WERTEBEREICH

Definitionsbereich:
Wie man schon durch die Funktionsgraphen erkennen kann, darf man einen Logarithmus nur von positiven Zahlen ziehen.

$D = \{x \in \Re \mid x > 0\} = \Re^+$, da $10^x > 0 \Leftrightarrow \log(>0) = x$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} \ln(x^2 - 5x + 6) = y \\ (x^2 - 5x + 6) = (x-3)\cdot(x-2) > 0 \end{array}\right\} \quad D = \{x \in \Re \mid x > 3 \vee x < 2\}$$

Wertebereich:
Aufgrund der Funktionsgraphen ist ersichtlich, dass ein Logarithmus alle reellen Werte annehmen kann.

$W = y \in \Re$, da $10^{(>0)} > 1 \wedge 10^{(\leq 0)} \leq 1$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} 12 - 3\cdot\ln(5x-3) = y \\ 12 - 3\cdot\,]-\infty;\infty[\; \Rightarrow \Re \end{array}\right\} \quad W = y \in \Re$$

DIE LOGARITHMEN-GLEICHUNG

Sofern eine reine Logarithmengleichung existiert kann man diese mit der folgenden Methodik lösen, wobei primäres Ziel eine Isolierung des Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung ist:

<u>Methodik:</u>

1. Die Faktoren vor dem Logarithmus in den Exponenten verschieben.
2. Alle positiven Terme über den Bruchstrich, alle negativen darunter schreiben.
3. Streichen der Logarithmen auf beiden Seiten.
4. Lösen der Gleichung.

Beispiel: $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log 2 - \frac{1}{2} \cdot \log x^4 = 2 \cdot \log 4 - \log(x-2)$

$$\log x^2 - \log 2^3 - \log\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}} = \log 4^2 - \log(x-2)$$

$$\log \frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \log \frac{16}{x-2}$$

$$\frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \frac{16}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = 16 \cdot 8 = 128 \Leftrightarrow x = 130$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3\cdot\log x - 4\cdot\log\frac{2}{x} - \frac{1}{3}\cdot\log\left(x^2\right)^6 = \frac{2}{3}\cdot\log 27 + \frac{1}{2}\cdot\log x^4 - 2\cdot\log 6$

2) $3\cdot\ln 4 - 0{,}5\cdot\ln\frac{16}{x^4} + 2\cdot\ln 8 = 1{,}5\cdot\ln x^4 - 8\cdot\ln\sqrt[4]{\frac{1}{x}} - 2\cdot\ln\frac{1}{4}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x) = \frac{2}{5}\cdot\ln\left(4x - 3 - x^2\right)$ 4) $g(x) = 42 + \log\left(2 - \sqrt{x-2}\right)$ 5) $h(x) = \frac{42}{ld(3\cdot x + 6)}$

III. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $\log\frac{1}{1000} - 4\ln\sqrt{e} + 16^{ld\sqrt{3}} + 2e^{2\cdot\ln 3} - \left(10^{\log 12} + 2ld4\right)$

2) $6\cdot\log\sqrt[3]{10} + 4^{ld3} - 2\cdot\ln\frac{1}{e^2} - 0{,}2\cdot ld\left(32^5\right) + \left(\frac{1}{100}\right)^{\log\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{e}\right)^{\ln\left(5^4\right)}$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

- Logarithmengleichung
- Fakultät
- Wertebereich
- Funktionsgraphen
- Definitionsbereich
- Ableitungen
- Achsenspiegelungen

VORKURS

02.10.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was und warum ergibt $ln(1)$?
- ✓ Wie kann man die Logarithmus-Funktion zeichnen?
- ✓ Was sind die wesentlichen Punkte der Umkehrfunktion?
- ✓ Wie kann man eine Ln-Funktion an beiden Achsen spiegeln?
- ✓ Wie verläuft die ln(x)-Funktion im Vergleich zu Log(x)?
- ✓ Welchen Definitions-/ Wertebereich hat die LN-Funktion?
- ✓ Wann spricht man von einer Logarithmus-Gleichung?
- ✓ Worauf ist bei Lösung solch einer Gleichung zu achten?

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $\frac{1}{4}\cdot\log(256x^8)-2\log\frac{\sqrt{9}}{x^2}-0{,}5\cdot\log\frac{x^4}{9}=1{,}5\cdot\log(9x^4)+3\cdot\log\frac{1}{2x^3}+4\cdot\log\sqrt{27\cdot x}$

2) $6\cdot\ln\sqrt[3]{3}-4\cdot\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{x}}+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{9}{x}\right)=2\cdot\ln\frac{\sqrt{x^3}}{3}-0{,}25\cdot\ln(16x^8)+3\cdot\ln\frac{8}{x^2}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\ln\left(x^2-6\cdot x-40\right)$

4) $g(x)=\log\left(\sqrt{2x+4}-8\right)-12$

5) $h(x)=\frac{3\cdot x}{\ln\left(15-3\cdot x\right)}$

QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine quadratische Gleichung/ Funktion stellt graphisch gesehen immer eine **Parabel** dar $x^2 + p \cdot x + q = 0$.
Um eine quadratische Gleichung lösen zu können, bringt man diese auf die sogenannte **Nullform**.
Die Lösungen dieser Gleichung (**Schnittpunkte mit der x-Achse**) erhält man durch die folgenden Lösungsverfahren:

✓Quadratische Ergänzung: $(x+a)^2 + b = 0 \Rightarrow S(-a;b)$

✓p-q-Formel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

✓Satz von Vieta: $x^2 + p \cdot x + q = (x+a) \cdot (x+b) = 0$

P-Q-FORMEL

Um die p-q-Formel zu beweisen, nutzt man das Verfahren der quadratischen Ergänzung auf die allgemeine quadratische Gleichung der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Es ist darauf zu achten, dass zum einen durch **elementare Umformungen** die **NULL-Form** der Gleichung entsteht und zum anderen **kein Faktor** vor dem x^2 auftauchen darf.

<u>Beweis</u>: $x^2 + p \cdot x + q = 0$

Wurzel *Halbierung* *Subraktion des Quadrats*

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \qquad \left| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \right.$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \left| \sqrt{} ; \right| - \frac{p}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

<u>Aufgabe</u>: Entwickeln Sie die Mitternachtsformel basierend auf $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

BEISPIELE

$$2 \cdot x^2 + 8 \cdot x = -6 \Leftrightarrow x^2 + 4 \cdot x + 3 = 0 \qquad | +6; | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4 \cdot x + 3 = (x+2)^2 - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 1 = 0 \\ (x+2)^2 = 1 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ x_1 = -3 \vee x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{quadratische Ergänzung}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4 \cdot x + 3 = 0; \; p = 4 \wedge q = 3 \\ x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} = -2 \pm 1 \\ x_1 = -3 \vee x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{p-q-Formel}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4 \cdot x + 3 = x^2 + (3+1) \cdot x + (3 \cdot 1) = 0 \\ (x+3) \cdot (x+1) = 0 \\ x_1 = -3 \vee x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{Satz von Vieta}$$

DIE PARABEL

Bei einer Parabel handelt es sich um die graphische Darstellung einer quadratischen Funktion. Die relevanten Punkte bzw. der Verlauf kann bereits im Vorfeld näher bestimmt werden.

Allgemeine Form: $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$

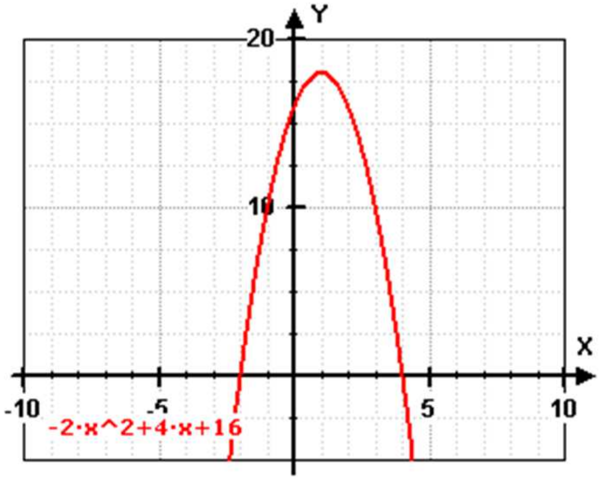
✓Verlauf: gestreckt $|\alpha| > 1$ bzw. gestaucht $|\alpha| < 1$
nach oben geöffnet $\alpha > 0$ bzw. nach unten $\alpha < 0$

✓Achsenschnittpunkte: y-Achse: $S_y(0/\gamma)$ bzw. x-Achse: $f(x) = 0$ (p-q-Formel)

✓Scheitelpunkt: Scheitelpunktform: $f(x) = \alpha \cdot (x + a)^2 + b \Rightarrow S(-a;b)$
Tiefpunkt $\alpha > 0$ bzw. Hochpunkt $\alpha < 0$

✓Symmetrie: Achsensymmetrie $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \gamma$
Sonst Symmetrie zur parallelen zum Scheitelpunkt

BEISPIEL



Funktionsgleichung:

$$f(x) = -2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 16$$

✓Verlauf: gestreckt, da $|\alpha| = |-2| > 1$
nach unten geöffnet, da $\alpha = -2 < 0$

✓Schnittpunkte: $S_y(0;16)$
$S_x : 0 = x^2 - 2 \cdot x - 8 = (x-4) \cdot (x+2)$ $S_{x_1}(-2;0); S_{x_2}(4;0)$

✓Scheitelpunkt: $f(x) = -2 \cdot \left((x-1)^2 - 1^2 - 8\right) = -2 \cdot (x-1)^2 + 18$
Scheitelpunkt (Hochpunkt): $S(1;18)$

✓Symmetrie: Achsensymmetrie zur Parallelen durch $x = 1$

BI-QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine **Bi-Quadratische Gleichung** $x^n + p \cdot x^{\frac{n}{2}} + q = 0$ ist dann vorhanden, wenn zwei Exponenten im Verhältnis 1:2 stehen und eine weitere Konstante existiert.

Nach der **Substitution** der Variablen stehen die bekannten Lösungsverfahren zur Verfügung und man erhält nach **Resubstitution** die Lösungsmenge.

Beispiel: $x^4 - 17 \cdot x^2 + 16 = 0$

Substitution: $z = x^2$

$$z^2 - 17 \cdot z + 16 = (z - 16) \cdot (z - 1) = 0$$

$$z_1 = 16 \vee z_2 = 1$$

Resubstitution: $x = \pm\sqrt{z}$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \vee x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 24 = 0$

2) $-0{,}5 \cdot x^2 + 2 \cdot x = -2{,}5$

3) $x \cdot (2 \cdot x - 20) = -32$

Wenden Sie je ein Verfahren an

II. Bestimmen Sie alle relevanten Eigenschaften der gegebenen Parabeln.

4) $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 3$

5) $g(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3$

6) $h(x) = 100 - 4 \cdot x^2$

- ✓Verlauf
- ✓Achsenschnittpunkte
- ✓Scheitelpunkt
- ✓Symmetrie

III. Bestimmen Sie die Lösung folgender Bi-Quadratischen Gleichungen.

7) $x^4 + 100 = 29 \cdot x^2$

8) $x^6 = 7 \cdot x^3 + 8$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

quadratische Ergänzung

Scheitelpunkt(form)

p-q-Formel

Parabel (Verlauf)

Satz von Vieta

Kettenregel

höhere Funktion

biquadratische Gleichung

(Re)substitution

VORKURS

04.10.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was versteht man unter der Nullform einer Gleichung?
- ✓ Wie / warum funktioniert der Satz von Vieta?
- ✓ Was sind Linearfaktoren?
- ✓ Warum ist p-q-Formel und quadratische Ergänzung identisch?
- ✓ Warum muss bei der QE stets subtrahiert werden?
- ✓ Wann spricht man von einer biquadratischen Gleichung?
- ✓ Wann sollte man substituieren?
- ✓ Was versteht man unter einer Resubstitution?

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $2 \cdot x^2 - 8 \cdot x = 10$

2) $3 \cdot x^2 = 9 \cdot x - 30$

3) $\frac{1}{4} \cdot x^2 + 3 \cdot x + 8 = 0$

Wenden Sie je ein Verfahren an

II. Bestimmen Sie alle relevanten Eigenschaften der gegebenen Parabeln.

4) $f(x) = -2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 18$

5) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 10 \cdot x + 32$

✓Verlauf
✓Achsenschnittpunkte
✓Scheitelpunkt
✓Symmetrie

III. Bestimmen Sie die Lösung folgender Bi-Quadratischen Gleichungen.

7) $x^4 - 24 \cdot x^2 = 25$

8) $x^8 + 16 = 17 \cdot x^4$

(FREPL)-METHODIK

Beim Lösen einer beliebigen Gleichung kann abgesehen von der Fallunterscheidung (F) stets mit folgender Methodik gearbeitet werden:

- ✓ **F**allunterscheidung:
  Je nach Aufgabenstellung muss definiert werden, für welchen Bereich die Betrachtung gilt.
- ✓ **R**echnung:
  Die zugrundeliegende Gleichung wird mittels elementarer Umformungen gelöst.
- ✓ **E**rgebnis:
  Durch die Berechnungen ergeben sich eine oder auch mehrere Ergebnisse.
- ✓ **P**robe:
  Mittels Probe bzw. Abgleich mit dem Definitionsbereich wird der Ergebnisraum untersucht.
- ✓ **L**ösung:
  Aufgrund er Probe kann nun die Lösungsmenge angegeben werden.

BETRAGSFUNKTION I

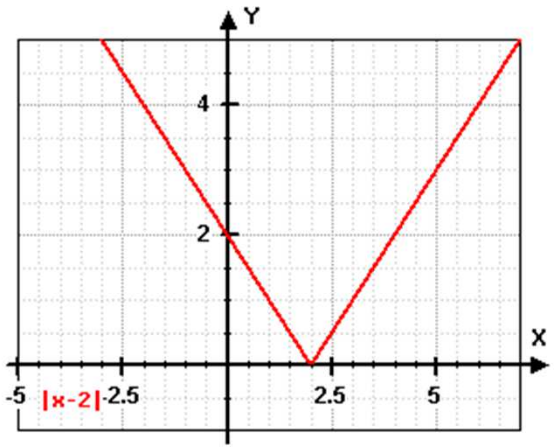
Da es sich bei dem Betrag einer Zahl um die reine **positive** Darstellung handelt, wird sie graphisch als sogenannte **V-Funktion** dargestellt.
Die Betragsstriche können weggelassen werden, in dem man den negativen Bereich mit einem **zusätzlichen Minus** vor dem Term versieht.

Beispiel:

$$f(x) = |x-2|$$

$x < 2$: $f(x) = -(x-2) = -x+2$

$x \geq 2$: $f(x) = x-2$



Aufgrund der Knickstelle ist die Betragsfunktion an der Schnittstelle mit der X-Achse **nicht differenzierbar**, d.h. es kann keine Steigung berechnet werden.

BETRAGSFUNKTION II

Ungleichungen, die auf einer Betragsfunktion basieren, können auch mittels (FREPL)-Methodik gelöst werden.

Beispiel: $|2x-8|>6$

$x>4 \Rightarrow 2x-8>6$	$x \leq 4 \Rightarrow -(2x-8)>6$	Fallunterscheidung
$2x-8>6 \Leftrightarrow 2x>14$ $\Rightarrow x>7$	$-2x+8>6 \Leftrightarrow -2x>-2$ $\Leftrightarrow x<1$	Rechnung
$x>7$	$x<1$	Ergebnis
$x=8 \Rightarrow \|2\cdot 8-8\|=8>6$	$x=0 \Rightarrow \|2\cdot 0-8\|=\|-8\|=8>6$	Probe
$L=\{x\in R \mid x>7 \vee x<1\}$		Lösung

Durch Multiplikation / Division mit negativen Zahlen dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

AUFGABEN

I. Skizzieren Sie folgende drei Betragsfunktionen

1) $f(x) = \left| \frac{2}{3}x - 2 \right|$

2) $g(x) = | x^2 - 7x + 12 |$

3) $h(x) = | \cos(x) |$

II. Geben Sie den zugehörigen Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen an.

4) $| 3 - x | < 2$

5) $| 4x - 12 | > 8$

BRUCHUNGLEICHUNGEN

Ungleichungen, die auf einem **Bruch** basieren, können ebenfalls mittels „**FREPL**" gelöst werden. Da für gewöhnlich im ersten Rechenschritt mit dem **Nenner multipliziert** wird, muss an dieser Stelle die **Fallunterscheidung** genutzt werden, um die Multiplikation mit einem negativen Ausdruck mathematisch korrekt darstellen zu können.

<u>Beispiel</u>: $\frac{3x-2}{x-3} > 2 \qquad | \cdot (x-3)$

Umkehrung des Ungleichheitszeichen

$x > 3 \Rightarrow 3x-2 > 2\cdot(x-3)$	$x < 3 \Rightarrow 3x-2 < 2\cdot(x-3)$	Fallunterscheidung
$3x-2 > 2x-6$ $\Leftrightarrow x > -4$	$3x-2 < 2x-6$ $\Leftrightarrow x < -4$	Rechnung
$x > 3$	$x < -4$	Ergebnis
$x = 4 \Rightarrow \frac{3\cdot 4-2}{4-3} = \frac{10}{1} > 2$	$x = -5 \Rightarrow \frac{3\cdot(-5)-2}{(-5)-3} = \frac{-17}{-8} > 2$	Probe

$$L = \{x \in R \mid x > 3 \vee x < -4\}$$ Lösung

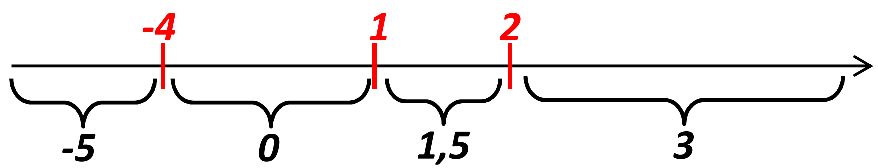
POLYNOMUNGLEICHUNGEN

Handelt es sich um ein Polynom vom Grade >1, so werden im ersten Schritt die Nullstellen der Gleichung bestimmt. Diese gefundenen Ergebnisse repräsentieren die Intervallgrenzen der Ungleichung, wodurch mittels Probe einer Zahl aus dem Intervall die Lösungsmenge bestimmt werden kann (REPL-Methodik).

<u>Beispiel</u>: $x^3+x^2-10x+8>0$ *Polynomdivision liefert:*

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+4)>0 \Leftrightarrow x_1=1 \vee x_2=2 \vee x_3=-4$$

Rechnung



Ergebnis

$$x=-5:(-5-1)\cdot(-5-2)\cdot(-5+4)<0 \quad \Rightarrow \textit{falsch}$$

$$x=0:(0-1)\cdot(0-2)\cdot(0+4)>0 \quad \Rightarrow \textit{richtig}$$

$$x=1{,}5:(1{,}5-1)\cdot(1{,}5-2)\cdot(1{,}5+4)<0 \quad \Rightarrow \textit{falsch}$$

$$x=3:(3-1)\cdot(3-2)\cdot(3+4)>0 \quad \Rightarrow \textit{richtig}$$

Probe

$$L=\{x\in R \mid (x>-4 \wedge x<1) \vee x>2\}$$

Lösung

AUFGABEN

I. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben die Lösungsmenge an.

1) $\frac{2x-5}{4-2x} > \frac{1}{2}$

2) $\frac{2x+1}{1+x} \geq 3$

3) $\frac{x \cdot (3+2x)}{6-2x} > 1-x$

4) $x^2 - 8x > 20$

5) $x^3 + x + 6 > 4x^2$

6) $x^4 - x^2 \leq 25 \cdot (x-1) \cdot (x+1)$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Ungleichungsregel

Betragsfunktion

FREPL

Bruchungleichungen

Polynomungleichungen

Fallunterscheidung

Lösungsmengen

VORKURS

07.10.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Worauf muss beim Lösen einer Ungleichung geachtet werden?
- ✓ Wie kann man eine Betragsfunktion zeichnen?
- ✓ Was bedeutet FREPL?
- ✓ Warum nutzt man bei einer Betragsungleichung FREPL?
- ✓ Wie löst man eine Bruchungleichung?
- ✓ Was geschieht, wenn beide Ungleichheitszeichen in die gleiche Richtung zeigen?
- ✓ Welche Möglichkeiten gibt es bei unterschiedlichen Zeichen?
- ✓ Wie kann man eine Polynomungleichung lösen?

AUFGABEN

I. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben die Lösungsmenge an.

1) $\frac{3x-2}{2-x} \leq -4$

3) $x^2 + 6 < 7x$

2) $\frac{2x^2-3}{2x+1} \geq x - 1$

4) $x(x^2 + 2x) > 13x - 10$

II. Geben Sie den zugehörigen Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen an.

5) $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| < 5$

6) $|1 - 2x| > \frac{1}{4}$

Gleichsetzungsverfahren

Wenn wir ein Gleichungssystem haben, das aus zwei Termen besteht, müssen Sie zuerst beide Gleichungen nach ein und derselben Variablen **auflösen** und dann die entstandenen Ausdrücke **gleichsetzen**.

Methode Gleichsetzungsverfahren

1. Freistellen nach einer Variablen
2. Gleichsetzung der Terme
3. Auflösen nach der verbleibenden Variable

Sie müssen nicht unbedingt nur nach einer Variablen – sprich ohne Faktor – auflösen. Es darf auch ein Vielfaches sein. Sie müssen nur darauf achten, dass beide Gleichungen nach dem **gleichen Vielfachen** freigestellt werden.

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 3x + 4y = 18 \\ 6x - 2y = 6 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3x = 18 - 4y \\ 3x = 3 + y \end{vmatrix}$$

Ich habe die erste Gleichung direkt nach 3x aufgelöst und bei der zweiten Zeile zuerst durch zwei dividiert und dann ebenfalls nach 3x freigestellt, so dass wir nun **gleichsetzen** dürfen.

$$18 - 4y = 3 + y \Leftrightarrow -5y = -15 \Leftrightarrow y = 3$$

Jetzt können wir das y in eine der freigestellten Gleichungen einsetzen und nach x auflösen.

$$y = 3{:}\ 3x = 3 + y \Leftrightarrow 3x = 3 + 3 = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

Die **Lösung** des obigen Gleichungssystems ist $(2/3)$

Einsetzungsverfahren

Wenn Sie ein Gleichungssystem vor sich haben, das Sie mit dem Einsetzungsverfahren lösen möchten, dann lösen Sie eine der Gleichungen **nach einer Variablen** auf und setzen den entstandenen Ausdruck in die andere Gleichung ein.

Methode Einsetzungsverfahren

1. Freistellen nach einer Variablen
2. Einsetzung in eine Gleichung
3. Auflösen nach der verbleibenden Variable

Auch hier muss die zu ersetzende Variable nicht alleine stehen, sondern kann auch noch einen Faktor haben.

BEISPIEL

Das Einsetzungsverfahren ist ähnlich wie die **Substitution** bei einer biquadratischen Gleichung, denn auch dort haben wir letztendlich ersetzt.

$$\begin{vmatrix} 12x - 5y = 29 \\ 18x + 2y = 34 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 12x - 5y = 29 \\ y = 17 - 9x \end{vmatrix}$$

Hier habe ich die zweite Gleichung zuerst nach $2y$ aufgelöst und dann den Ausdruck durch 2 dividiert.
Nun können wir überall dort wo ein y steht den Ausdruck $(17 - 9x)$ **einsetzen**.

$$12x - 5 \cdot (17 - 9x) = 12x. 85 + 45x = 29 \Leftrightarrow 57x = 114$$

Wir haben also $x = 2$ als Lösung und können diese nun nutzen:

$$x = 2: y = 17 - 9x \Leftrightarrow y = 17 - 18 = -1 \Leftrightarrow y = -1$$

Die Lösung des obigen Gleichungssystems ist also $(2/-1)$

Additionssverfahren

Das Additionsverfahren ist nichts anderes als das Gauß'sche Eliminationsverfahren und für jedes Gleichungssystem geeignet. Egal wie viele Unbekannte oder Gleichungen existieren.

Es basiert eigentlich darauf, dass wir versuchen durch **Addition** eine existierende Variable zu **eliminieren**. Die Zeile, mit der wir diese Operation starten nennen wir **Pivot-Zeile**.

Methode Additionsverfahren

1. Definition der Pivot-Zeile
2. Erzeugung von gleichen Faktoren
3. Neutralisation einer Variablen

Wichtig ist, dass Sie am besten **immer** nur addieren. Sie dürften zwar auch subtrahieren, nur ist diese Art der Rechnung aus meinen Erfahrungen heraus zu fehleranfällig.

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 5x + 3y = 5 \\ 3x + y = -1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5x + 3y = 5 \\ -9x - 3y = 3 \end{vmatrix}$$

Wir haben uns die zweite Zeile als **Pivot-Zeile** ausgesucht und diese Gleichung mit (-3) multipliziert, damit die Faktoren vor dem y entgegengesetzt gleich sind.

$$\begin{vmatrix} 5x + 3y = 5 \\ -4x = 8 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x = -2 \wedge 5 \cdot (-2) + 3y = 5 \Leftrightarrow y = 5$$

Die Lösung des obigen Gleichungssystems ist also $(-2/5)$

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN I

Existiert ein **eindeutig lösbares** LGS bestehend aus **n Gleichungen mit m Unbekannten** , so kann Die Lösungsmenge mittels dem **Gauß-Algorithmus** bestimmt werden.

Ziel des Verfahrens ist ein durch **elementare Umformungen** ein gestaffeltes Gleichungssystem (**Stufenstruktur**) zu erhalten, in der die Lösungsmenge einfach bestimmt werden kann.

<u>Methodik (Hinrechnung):</u>

1. Bestimmung der vollbesetzten **Pivotzeile** (nur einmal verwendbar).
2. Durch elementare Umformungen der Pivotzeile und Addition auf alle übrigen m-1 Zeilen muss eine **Variable** (Spalte) komplett **neutralisiert** werden.
3. Es bleiben demzufolge nur noch m-1 Gleichungen mit n-1 Unbekannten übrig, mit denen man wieder beim **ersten Schritt** beginnt.

<u>Methodik (Rückrechnung):</u>

1. Sofern nötig werden die **frei wählbaren Variablen** vorbelegt.
2. Berechnung der 1. Unbekannten in der **kürzesten Stufe**.
3. Einsetzen der 1. Unbekannten in die **nächst höhere Stufe** und Bestimmung der 2. Unbekannten.

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN I

<u>Eigenschaften des Gauß Algorithmus:</u>

- ✓ Eine **Pivotzeile** ist eine Gleichung die nur einmalig benutzt werden darf, um eine Variable zu eliminieren. Anschließend darf sie nicht menr „angefasst“ werden.
- ✓ Es dürfen einzelne Gleichungen mit einer Zahl **multipliziert** werden.
- ✓ Nach dem 2. Schritt der Hinrechnung, sollte das entstehende lineare Gleichungssystem vereinfacht (**Sortierung bzw. Ausklammern**) werden.
- ✓ Es dürfen ohne weiteres **parallele Zeilen** miteinander vertauscht werden.
- ✓ Beim **Tausch von Spalten** ist darauf zu achten, dass die Koordinaten des Lösungssystems nun an einer **anderen Position** stehen (durch Markierung kenntlich machen).
- ✓ Das Gauß-Verfahren sollte angewandt werden, sofern entweder **kein quadratisches System** vorhanden ist oder **mindestens eine 4x4-Struktur** vorhanden ist.
- ✓ Sind am Ende des Gauß-Alogithmus **mehr Unbekannte als Gleichungen** vorhanden so werden die Differenz aus Unbekannte-Gleichung als **Parameter** vorbelegt.

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN III

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ \cdot 2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \cdot 2 \quad \text{Tausch}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_4 & \Rightarrow & x_4 & = & 0 \\ x_3 = -1 - 3x_4 & \Rightarrow & x_3 & = & -1 \\ x_2 = -2 - x_4 - 4x_3 & \Rightarrow & x_2 & = & 2 \\ 2x_1 = 1 - 3x_3 - x_2 & \Rightarrow & x_1 & = & 1 \end{array}\right\} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen, in dem Sie die Funktionen in ein Koordinatensystem eintragen.

   a. $\left|\begin{array}{c} 2y = 4 - x \\ 3y + 9 = 6x \end{array}\right|$

   b. $\left|\begin{array}{c} y - 2x = 4 \\ x + 3y = -9 \end{array}\right|$

2. Berechnen Sie das folgende Gleichungssystem, indem Sie das Einsetzungsverfahren anwenden.

   a. $\left|\begin{array}{c} \frac{2}{3}y - 4x = -8 \\ 12x - 3y = 18 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{c} 4y - 8x = 24 \\ 3y = 6x + 12 \end{array}\right|$

3. Wenden Sie zur Lösung das Additionsverfahren an

   a. $\left|\begin{array}{c} 2x - y = -7 \\ 3x + 4y = 6 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{cccc} x & & +z & =1 \\ 2x & -2y & & =2 \\ -3x & +2y & +2z & =3 \end{array}\right|$

4. Nutzen Sie zur Berechnung das Gleichsetzungsverfahren.

   a. $\left|\begin{array}{c} -\frac{2}{8}x + \frac{3}{4}y = -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2}x - y = 7 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{c} \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x = \frac{1}{15} \\ \frac{2}{3}x = \frac{3}{5} - 3y \end{array}\right|$

AUFGABEN

I. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mittels Gauß.

a) $$\left| \begin{array}{c} 2x - y + 3z = 7 \\ -2x + 2y - 5z = -10 \\ 4x - 5y + 8z = 15 \end{array} \right|$$

b) $$\left| \begin{array}{c} x + 3y - 2z = -2 \\ -2x - 5y + 2z = -1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{array} \right|$$

c) $$\left| \begin{array}{c} -x + 2y - z = -5 \\ x - 3y + 2z = 8 \\ 2x - y + 5z = 13 \end{array} \right|$$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Gleichungssystem

Gleichsetzungsverfahren

Einsetzungsverfahren

Additionsverfahren

$y = m \cdot x + b$

Pivotzeile

Gaußsches Eliminationsverfahren

Elementare Umformungen

VORKURS

08.10.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was versteht man unter einem linearen Gleichungssystem?
- ✓ Wie funktioniert das Einsetzungsverfahren?
- ✓ Worauf ist beim Gleichsetzungsverfahren zu achten?
- ✓ Wie kann man ein LGS mit zwei Gleichungen zeichnerisch lösen?
- ✓ Wie zeichnen Sie eine Gerade in ein Koordinatensystem?
- ✓ Was versteht man unter dem Additionsverfahren?
- ✓ Was sucht man bei 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten?
- ✓ Was bedeutet die Pivot-Zeile eines LGS?

AUFGABEN

I. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem grafisch.

a) $\left| \begin{array}{l} 2x - y = -7 \\ 3x + 4y = 6 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} y - 2x = 4 \\ x + 3y = -9 \end{array} \right|$

II. Sie die folgenden Gleichungssysteme. Wenden Sie insgesamt 3 verschiedene Verfahren an.

a) $\left| \begin{array}{l} x + 3y = 25 \\ 4x - y = 22 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{c} -5 = 0{,}25y + 0{,}5x \\ 2y + 4x = 100 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{c} \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = \frac{1}{12} \\ 2y - \frac{3}{8}x = \frac{9}{4} \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{l} 3y - 2x = 13 \\ 8x + 4y = -4 \end{array} \right|$

e) $\left| \begin{array}{c} 2y = 1 - 0{,}5x \\ 0{,}25x = 0{,}6 - y \end{array} \right|$

f) $\left| \begin{array}{c} \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{2}x = \frac{3}{5} - 3y \end{array} \right|$

AUFGABEN

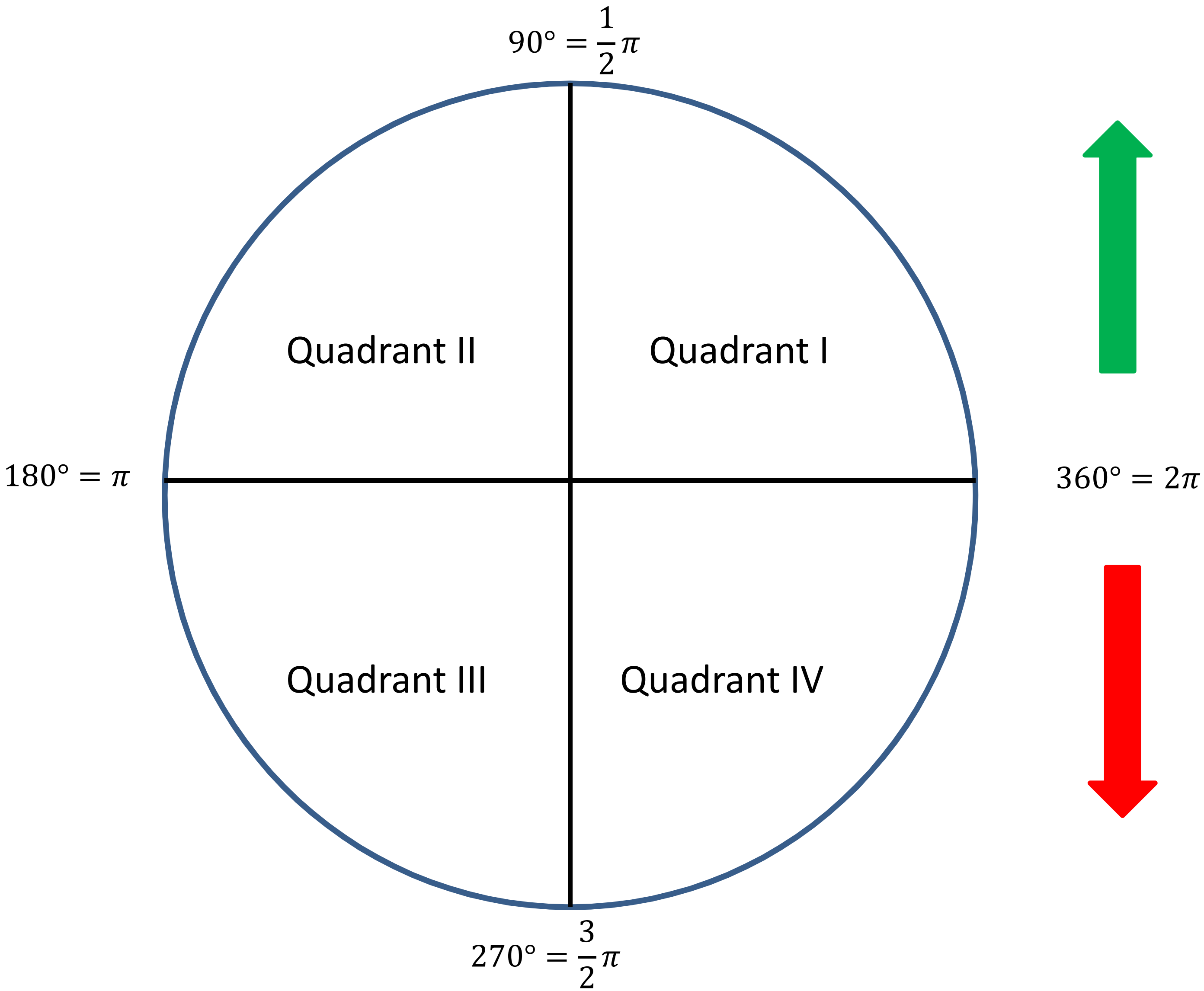
I. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mittels Gauß.

a) $$\left|\begin{array}{c} 2x - y + 3z = 7 \\ 4x + 3y - z = -3 \\ -x + 2y - 3z = -8 \end{array}\right|$$

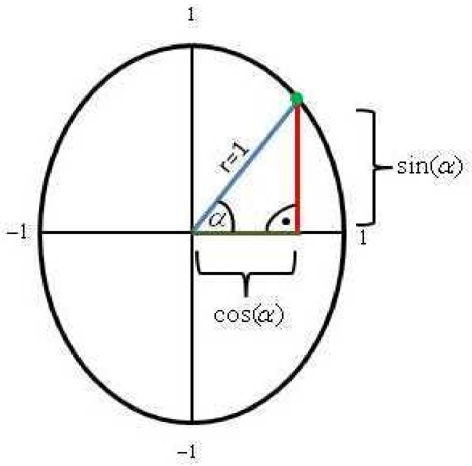
b) $$\begin{array}{cccccc} 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & 2x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array}$$

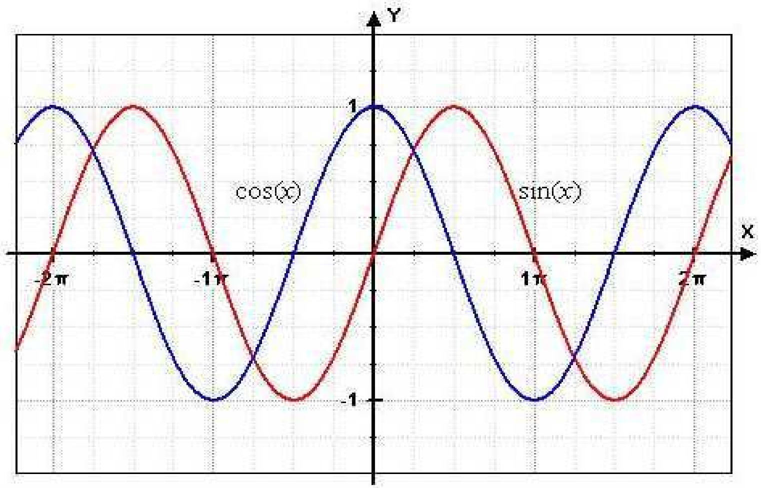
c) $$\left|\begin{array}{c} x - 3y + z = -2 \\ -x + 2y - 3z = -6 \\ 2x + y + 4z = 16 \end{array}\right|$$

DER EINHEITSKREIS



TRIGONOMETRIE I

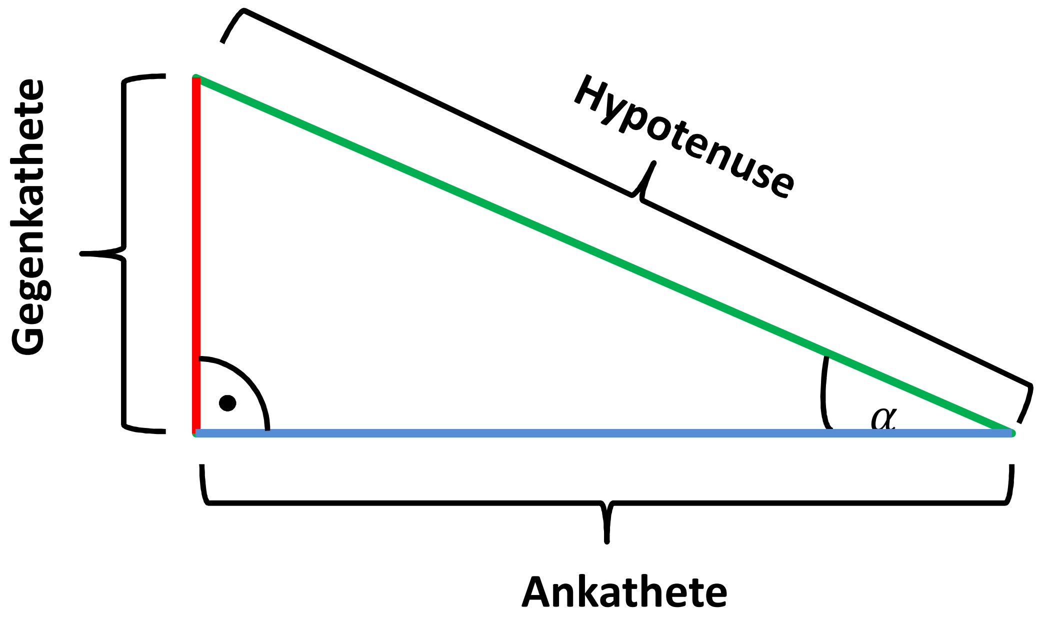




Bestimmte Sinus und Cosinuswerte

DEG	0°	30°	45°	60°	90°
RAD	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
SIN	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
COS	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

TRIGONOMETRIE II



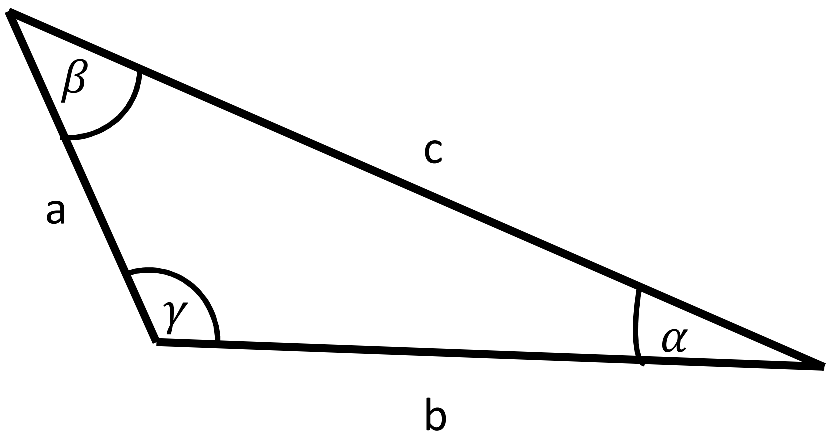
$$sin(\propto) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

$$cos(\propto) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$$

$$tan(\propto) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

$$cot(\propto) = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$$

TRIGONOMETRIE III



Sinussatz:

$$\frac{sin(\alpha)}{a} = \frac{sin(\beta)}{b} = \frac{sin(\gamma)}{c}$$

Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$$

AUFGABEN

I. Geben Sie Schätzungen für die folgenden Werte an.

$a)\sin(300°)$ $b)\cos(60°)$ $c)\cos(400°)$ $d)\sin(800°)$

III. Geben Sie alle Seiten und Winkel der (rechtwinkligen) Dreiecke an.

a) $\beta = 90°, a = 4m, c = 3m$

b) $\gamma = 60°, a = 5m$

IV. Bestimmen Sie von dem (nicht-rechtwinkligen) Dreieck mit den Werten $b = 6\ cm, c = 0{,}5\ dm,\ \gamma = 20°$ den Umfang und Fläche.
Verwenden Sie mindestens einmal den Sinus- und Cosinussatz.

TRIGONOMETRIE IV

Für die Sinus/ Cosinus-Funktion sind im Bereich der **Addition der Argumente** zwei **Additionstheoreme** definiert, wodurch stets bei **rechtwinkliger Konstellation** entweder ein Sinus oder ein Cosinus aus der Funktion **entfernt** werden kann.

1) $\boxed{\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)}$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2x)$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(2x) = \cos(2x)$$

90° Phasenverschiebung
der Sinusfunktion = Cosinusfunktion

2) $\boxed{\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)}$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = \cos(\frac{3}{2}\pi) \cdot \cos(3x) + \sin(\frac{3}{2}\pi) \cdot \sin(3x)$$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = 0 \cdot \cos(3x) + (-1) \cdot \sin(3x) = -\sin(3x)$$

270° Phasenverschiebung
der Cosinusfunktion = -Sinusfunktion

AUFGABEN

I. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit als möglich.

$a)\sin(4x-\frac{3}{2}\pi)$ $\quad$ $b)\cos(-\frac{1}{2}\pi+2x)$ $\quad$ $c)\cos(\frac{3}{2}\cdot(2x+3\pi)$

II. Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang.

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos(x))$$

$Tipp: cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$

TRIGONOMETRIE V

Eine rein trigonometrische Funktion (**sinus/ cosinus**) stellt eine **Schwingung** innerhalb einer bestimmbaren **Periode** und eines konstanten Wertebereichs dar, die für alle reellen Zahlen definiert ist.

$$\boxed{f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d}$$

Die vier Parameter in der Funktion beziehen sich zum einen auf die **Verschiebung** und zum anderen auf die **Streckung/ Stauchung** in der x-Achsen bzw. y-Achsen-Richtung:

a:	Amplitudenfaktor	Streckung/Stauchung in y-Achsen-Richtung
b:	Periodenfaktor	Streckung/Stauchung in x-Achsen-Richtung
c:	Phasenverschiebung	Verschiebung in x-Achsen-Richtung
d:	Wertebereichverschiebung	Verschiebung in y-Achsen-Richtung

Symmetrie:

- SIN: Punktsymmetrie $\quad f(x) = -f(-x) \Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$
- COS: Achsensymmetrie $\quad f(x) = f(-x) \Rightarrow \cos(x) = \cos(-x)$

Bei dem Periodenfaktor gilt für die **neue Periode**: $\boxed{P_{NEU} = \frac{P_{ALT}}{b}}$

TRIGONOMETRIE VI

Anhand der folgenden Vierfeldertafel können die grundlegenden Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion direkt abgelesen werden.

Es wird dabei davon ausgegangen, dass es sich um eine Standardfunktion in der Form $sin^n(g(x))$ oder $cos^n(h(x))$ handelt.

Vierfeldertafel

	$\boldsymbol{n = gerade}$	$\boldsymbol{n = ungerade}$
$\boldsymbol{sin^n(g(x))}$	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = -f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$\boldsymbol{cos^n(h(x))}$	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$

TRIGONOMETRIE VII

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 3\pi) + 4$

Vereinfachung: $f(x) = 3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(3\pi) + \sin(3\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4$

$$f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

Wertebereich: $-3 \cdot [-1;1] + 4 = [-3;3] + 4 \Longrightarrow W = y \in [1;7]$

Periode: $P_{NEU} = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi \Rightarrow f(x) = f(x + 3\pi)$

$$f(x) = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x + 3\pi)) + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 2\pi) + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

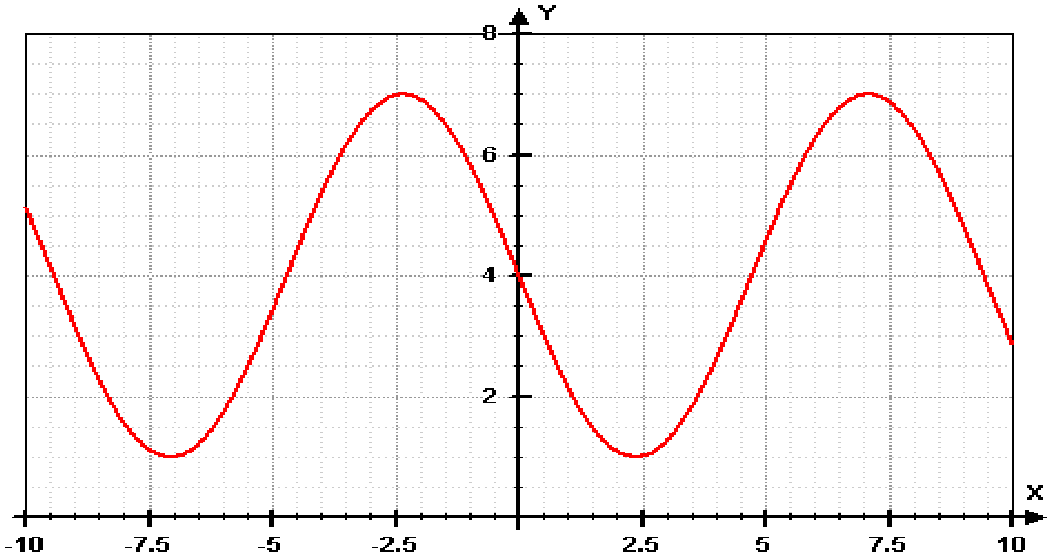
TRIGONOMETRIE VIII

Beispiel: $f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$

Symmetrie: Punktsymmetrie $f(x) - 4 = -[f(-x) - 4]$

$$\left.\begin{aligned} f(x) - 4 &= -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4 - 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) \\ -[f(-x) - 4] &= -\left[-3 \cdot \sin(-\frac{2}{3}x) + 4 - 4\right] = 3 \cdot \sin(-\frac{2}{3}x) \end{aligned}\right\} =$$

Skizze:



AUFGABEN

Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und fertigen Sie eine Skizze an.

1) $f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(4x - 5\pi)$

2) $g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\pi\right) + 5$

3) $h(x) = 3 \cdot \left[\cos(2x - \pi) + 2\right]$

4) $k(x) = 5 + \frac{2}{3} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot (\pi - x)\right)$

5) $l(x) = 5 + 3 \cdot \sin^6(2x + 2{,}5\pi)$

6) $g(x) = 6 \cdot \sin^3\left(\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}\pi\right) + 2$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Einheitskreis

Sinus

Cosinus

(Co)-Tangens

Gegenkathete

Cosinussatz

Ankathete

Sinussatz

Hypotenuse

Frequenz

Periode

Additionstheoreme

Phasenverschiebung

Amplitudenmodulation

VORKURS

09.10.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Beschreiben Sie die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.
- ✓ Wie werden trigonometrische Funktionen definiert?
- ✓ Wie erfolgt die Umrechnung von Bogenmaß in Gradmaß?
- ✓ Was beschreibt der Sinussatz?
- ✓ Warum ist der Cosinussatz im Grunde genommen der Pythagorassatz?
- ✓ Was bedeutet eine Phasenverschiebung?
- ✓ Was wissen Sie wenn das Argument durch 90 teilbar ist?
- ✓ Wie sieht die Tangensfunktion aus?

AUFGABEN

I. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit als möglich und geben die Eigenschaften der Funktionen an.

$a)\sin(2x-9\pi)$ $b)\sin(2{,}5x-7{,}5\pi)$

$c)\cos(12\cdot(4x-5\pi)$ $d)\cos(\frac{1}{2}\cdot(7\pi+6x)-3{,}5\pi)$

II. Skizzieren Sie den Graphen zu Cotangens.

III. Geben Sie alle Seiten und Winkel der (rechtwinkligen) Dreiecke an.

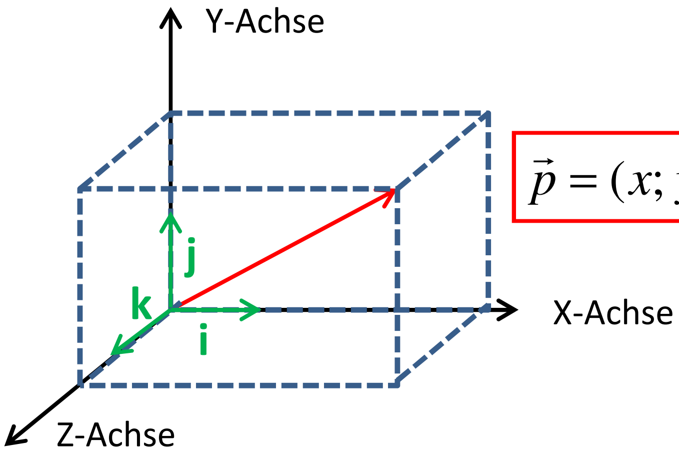
a) $\alpha=90°, a=5cm, b=3cm$ b) $\alpha=30°, c=6cm$

IV. Bestimmen Sie von dem (nicht-rechtwinkligen) Dreieck mit den Werten $a = 8\ dm, c = 9{,}1\ dm, \beta = 20°$ den Umfang und Fläche.
Verwenden Sie mindestens einmal den Sinus- und Cosinussatz.

EUKLIDISCHER VEKTORRAUM

Als Grundlage für Geraden- und Ebenenberechnung im 3-dimensionalen Raum dient der Euklidische Verktorraum $\Re x \Re x \Re = \Re^3$.

Die Vektoren können nicht nur senkrecht, sondern auch in der waagerechten der sogenannten **transponierten** Form $(x; y; z)^T$ dargestellt werden.



$$\boxed{\vec{p} = (x; y; z)^T}$$

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} i = (1;0;0)^T \\ j = (0;1;0)^T \\ k = (0;0;1)^T \end{array}}\right\}$$ Koordinaten-einheitsvektoren

Betrag: $\left|\vec{p}\right| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Winkel: $\cos(i, \vec{p}) = \dfrac{x}{r}; \cos(j, \vec{p}) = \dfrac{y}{r}; \cos(k, \vec{p}) = \dfrac{z}{r}$

VEKTORENKLASSEN

Für die Vektorrechnung im Bereich von Geraden, Ebenen und Körper ist es wichtig die beiden möglichen Arten von Vektoren zu unterscheiden.

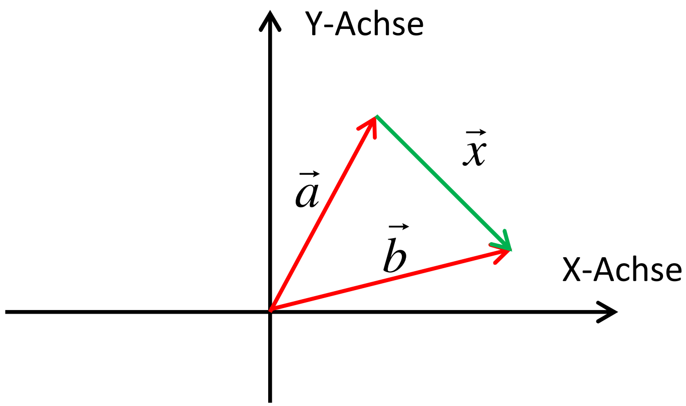
✓ Ortsvektor: Stellt die direkte Verbindung vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt im Raum dar. $\vec{a} = \overline{0A}$

✓ Richtungsvektor: Werden zwei beliebige Punkte im Raum verbunden, so erhält man den Richtungsvektor, der sich stets aus der Differenz zwischen Endpunkt und Anfangspunkt berechnet. $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Beispiel:

✓Ortsvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

✓Richtungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$



DAS SKALARPRODUKT

Bei der Multiplikation von zwei Vektoren nutzt man die Methodik des **inneren Produkts**.

$$\theta(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$$

Es werden demzufolge die einzelnen Komponenten untereinander multipliziert und die Ergebnisse anschließend addiert. Als Ergebnis bekommt man somit keinen Vektor, sondern eine **reelle Zahl**.

<u>Eigenschaften</u>:

- nicht binär $\Re^n * \Re^n \to \Re$
- kommutativ $\theta(\vec{a},\vec{b}) = \theta(\vec{b},\vec{a})$
- assoziativ $\beta \cdot \theta(\vec{a},\vec{b}) = \theta(\beta \cdot \vec{a},\vec{b}) = \theta(\vec{a},\beta \cdot \vec{b})$
- distributiv $\theta(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = \theta(\vec{a},\vec{c}) + \theta(\vec{b},\vec{c})$
- positiv definiert $\theta(\vec{a},\vec{a}) > 0 \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot b_i = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = 3$$

ÄUßERES PRODUKT (VEKTORPRODUKT)

Eine weitere Möglichkeit zwei Vektoren zu multiplizieren ist das **äußere Produkts**.
Es wird stets diagonal multipliziert (siehe Determinaten), wobei rechts herum positiv und links herum negativ gerechnet wird.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- Binäre Operation: $\Re^n \times \Re^n \to \Re^n$
- antikommutativ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- assoziativ $\beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \beta \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \beta \cdot \vec{b}$
- distributiv $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LÄNGE / WINKEL VON VEKTOREN

Da es sich bei einem Vektor um ein n-dimensionales Objekt handelt, kann der erreichte Punkt entweder mittels Koordinaten oder via Länge und Winkel dargestellt werden.

➢Länge: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\theta(\vec{a},\vec{a})}$

Normierter Vektor: $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ *(Länge ist Eins)*

Abstand $D(\vec{a},\vec{b})$*:* $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \ldots + (a_n-b_n)^2}$

➢Winkel: $\theta(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = \sqrt{\theta(\vec{a},\vec{a})} \cdot \sqrt{\theta(\vec{b},\vec{b})} \cdot \cos\alpha$

Cauchy-Schwarze Ungleichung $\alpha = \arccos \frac{\theta(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\theta(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1$

Orthogonalitätskriterium: $\cos(90^\circ) = 0 \Rightarrow \theta(\vec{a},\vec{b}) = 0 \wedge (|\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0)$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie – sofern möglich - das innere / äußere (im R³) Produkt der folgenden Vektoren untereinander sowie deren Summe/ Differenz und bilden Sie jeweils den normierten Vektor.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen anschließend deren Abstände.

a)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ X \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ Y \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

LINEARE (UN)ABHÄNGIGKEIT

Grundlage der (Un)Abhängigkeit von Vektoren ist dessen **Linearkombination**, d.h. es wird jeder Vektor mit einem beliebigen **Skalar** multipliziert und anschließend die Summe gebildet.

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \ldots + \zeta \cdot \vec{z}$$

Im Fall der (Un)Abhängigkeits-Prüfung untersucht man, ob einer der Vektoren mittels einer Linearkombination der übrigen darstellbar ist, d.h. man bildet die Linearkombination der Vektoren und setzt diese Kombination gleich Null.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \beta \cdot \vec{b} + \ldots + \zeta \cdot \vec{z} \Leftrightarrow \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \ldots + \zeta \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

Existiert nur die sogenannte **Triviallösung** der Form $\alpha = \beta = \ldots = \zeta = 0$, dann sind die Vektoren **linear unabhängig**. Sollte eine der entstehenden Lösungen $\neq 0$ sein, dann sind sie **linear abhängig**.

<u>Beispiel</u>: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = -2 \end{array}$

BASIS / SPAN

In einer **Basis** sind Objekte/ Vektoren enthalten, die einen zugehörigen **n-dimensionalen** Raum komplett auf**span**nen können.

Demzufolge besteht der Euklidische Vektorraum $\Re^3$ aus den 3 **Koordinaten-Einheits-Vektoren**:

$$\left.\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \left.\begin{array}{l} \textit{linear unabhängig} \\ \textit{normiert (Länge 1)} \\ \textit{orthogonal} \end{array}\right\} \textbf{Orthonormalsystem}$$

Grundvoraussetzung ist die lineare Unabhängigkeit, d.h. eine begrenzte Anzahl von linear unabhängiger Vektoren bilden eine Basis, wobei die Anzahl der enthaltenen Vektoren die Dimension des Raums angibt.

Die Dimension ist unabhängig von der Anzahl der Komponenten/ Koordinaten eines Vektors.

<u>Beispiel</u>: *Die drei Vektoren (letztes Beispiel) sind linear unabhängig und bilden demzufolge auch eine Basis. Da es sich um drei Basisvektoren handelt, spannen Sie einen Raum der 3. Dimension auf.*

LÖSUNGSMETHODIK

Frage: Bilden die gegebenen Vektoren eine Basis des $\Re^3$?

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix};\vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\gamma\cdot\vec{c}=\vec{0}$$

$$\left|\begin{array}{llllr}1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = & 0\\ 3\alpha & +1\beta & +1\gamma & = & 0\\ -2\alpha & -3\beta & +5\gamma & = & 0\end{array}\right| \begin{array}{l}|\cdot(-3)\ \ |\cdot 2\\ +\quad +\\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{llllr}1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = & 0\\ 0 & -5\beta & +10\gamma & = & 0\\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = & 0\end{array}\right| \begin{array}{l}\\ +\\ |\cdot 5\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{llllr}1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = & 0\\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = & 0\\ 0 & 0 & +5\gamma & = & 0\end{array}\right|\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$ Triviallösung: Die Vektoren sind linear unabhängig.

Es handelt sich somit um eine Basis $B=\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}\right)$ mit der Dimension 3.

Somit kann durch diese Basis der $\Re^3$ aufgespannt werden.

,
,

AUFGABEN

1) Sind die folgenden 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig?
   Stellen Sie den Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2) Prüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren eine Basis bilden und geben die maximal mögliche Dimension mit dem zugehörigen Raum an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3) Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta \in \Re$ so, dass das Vektorsystem (v_1, v_2, v_3) mit
   $v_1 = (1, \alpha, -1)^T$, $v_2 = (2,1,0)^T$ und $v_3 = (-3, -\beta, 1)^T$ linear unabhängig ist.

GERADENGLEICHUNG

Eine Gerade ist die graphische Darstellung einer linearen Gleichung bestehend aus **Steigung** und **Startpunkt** bzw. Achsenabschnitt und wird in folgenden zwei Arten dargestellt.

- ✓ Parameterfreie Form: $y = m \cdot x + b$
  b=Achsenabschnitt; m = Steigung

- ✓ Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \alpha \cdot \overline{AB}$
  $\vec{a}$ = Ortsvektor (Startpunkt); $\overline{AB}$= Richtungsvektor

Beispiel:

- ✓ Parameterfreie Form:

$$\left.\begin{array}{l} A = (3;5) \\ B = (2;7) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{7-5}{2-3} = -2 \\ b = y - m \cdot x = 7 - (-2) \cdot 2 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2 \cdot x + 11$$

- ✓ Parameterform:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} (-1)-2 \\ 2-1 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

,
,

AUFGABEN ZU GERADEN

1) Berechnen Sie das äußere Produkt der folgenden Vektoren.

   a) $\vec{a} = (2;-1;3)^T ; \vec{b} = (-1;2;5)^T$ b) $\vec{c} = (-2;4;1)^T ; \vec{b} = (5;3;1)^T$

2) Berechnen Sie sowohl die parameterfreie als auch die Parameterform der Gerade durch die folgenden Punkte und fertigen Sie eine Skizze an.

   a) $A = (2;5); B = (-2;3)$ b) $A = (-1;3); B = (2;-6)$

3) Geben Sie die Parameterform der Geraden durch folgende Punkte an.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} ; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

LAGERELATION VON GERADEN I

Im Euklidischen Vektorraum $\mathfrak{R}^3$ handelt es sich um einen **3-dimensionalen Raum**, der durch die 3 Koordinanteneinheitsvektoren als **Basis** definiert ist.
Da eine Gerade nur ein 2-dimensionales Objekt ist, existieren insgesamt vier mögliche Lagerelationen:

*Gerade = Startpunkt + Parameter * Richtungsvektor*

- ✓ parallel: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **nicht auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ identisch: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ schneiden sich: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich eine **eindeutige Lösung** für die Parameter.
- ✓ windschief: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich ein **Widerspruch** für die Parameter.

LAGERELATION VON GERADEN II

Aufgrund der definierten Lagerelationen ergibt sich der folgende Entscheidungsbaum:

$$g_1 : \vec{x}_1 = \vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{b}_1 \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \vec{a}_2 + \beta \cdot \vec{b}_2$$

$$\vec{b}_1 = \gamma \cdot \vec{b}_2$$ *Abhängigkeit der Richtungsvektoren*

JA NEIN

Prüfen des Startpunkts $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{b}_1$

$g_1 = g_2$ *Gleichsetzen der Geraden*

JA NEIN JA NEIN

identisch *parallel* *Schnittpunkt* *windschief*

LAGERELATION VON GERADEN III

<u>Beispiel</u>: $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. *Abhängigkeit der Richtungsvektoren*: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma = 3 \\ \gamma = 1 \\ \gamma = -4 \end{matrix}$

2. *Gleichsetzen der Geraden*: $g_1 = g_2 \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ -2\alpha & 2\beta & = & -2 \\ -4\alpha & -1\beta & = & 6 \end{matrix} \right| \begin{matrix} |\cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ 4\alpha & 0 & = & -8 \\ -7\alpha & 0 & = & 9 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \alpha = -2 \wedge \alpha = -\frac{9}{7}$$

Aufgrund des Widerspruchs müssen die beiden Geraden windschief zueinander liegen.

,
,

AUFGABEN ZUR LAGERELATION

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

a) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden und geben deren Lage zueinander an.

a) $g_1 : \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $g_2 : \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{a} = (2;-2;5)^T ; \vec{b} = (-1;1;3)^T$ $\quad$ $g_2 : \vec{c} = (-1;3;2)^T ; \vec{d} = (3;-2;5)^T$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE I

Zur Berechnung von einem Abstand definieren wie den **Punkt** *Q* und die Gerade in der Form $g_n : \vec{x}_n = P_n + \alpha \cdot \vec{b}_n$ mit P_n als **Startpunkt** und $\vec{b}_n$ als **Richtungsvektor** der Geraden *n*.

- ✓ Punkt zu Gerade: $$d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}$$

- ✓ Gerade zu Gerade (**parallel**): $$d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}$$

- ✓ Gerade zu Gerade (**windschief**): $$d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\right|}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE II

Beispiel Punkt zu Gerade:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}}$$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 10 - 20 \\ -4 - (-15) \\ -15 - (-2) \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-10)^2 + 11^2 + (-13)^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{390}{29}} \approx 3{,}67$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE III

Beispiel Gerade zu Gerade:
(parallel)

$$g_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 7-12 \\ -3-14 \\ 8-(-1) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (17)^2 + 9^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{395}{14}} \approx 5{,}31$$

BEISPIELE ABSTAND

<u>Gerade zu Gerade:</u>
(windschief)

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\right|}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}}$$

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) * \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{|-15 + 6 - 15|}{\sqrt{38}} = \frac{24}{\sqrt{38}} \approx 3{,}89$$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie von den gegebenen Vektoren deren Winkel miteinander und mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie auch das Vektorprodukt sowie den Abstand der Vektoren.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen den Flächeninhalt des sich aufspannenden Rechtecks.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3x \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2x \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4x \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -5x \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

,
,

AUFGABEN ZUR LAGERELATION

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

a) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

2) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Euklidischer Vektorraum

Richtungsvektor

Vektorprodukt

Ortsvektor

Skalarprodukt

Geradengleichung

Basis

Span

Lagerelation

lineare Abhängigkeit

Winkel

Betrag

Abstände

JIPIEHHH, ES IST GESCHAFFT!!!!!