VORKURS

02.10.2018

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Durch welchen Punkt verläuft jede Exponentialfunktion (Warum)?
- ✓ Wie kann man eine Ln-Funktion an beiden Achsen spiegeln?
- ✓ Worin besteht der Unterschied zwischen Ergebnis und Lösung?
- ✓ Wie verläuft die ln(x)-Funktion im Vergleich zu Log(x)?
- ✓ Welchen Einfluss hat die Basis auf eine Exponentialfunktion?
- ✓ Was bewirkt das Addieren einer Konstanten zu einer Funktion?
- ✓ Welchen Definitions-/ Wertebereich hat die LN-Funktion?
- ✓ Wie machen Sie die Basis zum Logarithmus passend?

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $\frac{1}{4}\cdot\log(256x^8)-2\log\frac{\sqrt{9}}{x^2}-0{,}5\cdot\log\frac{x^4}{9}=1{,}5\cdot\log(9x^4)+3\cdot\log\frac{1}{2x^3}+4\cdot\log\sqrt{27\cdot x}$

2) $6\cdot\ln\sqrt[3]{3}-4\cdot\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{x}}+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{9}{x}\right)=2\cdot\ln\frac{\sqrt{x^3}}{3}-0{,}25\cdot\ln(16x^8)+3\cdot\ln\frac{8}{x^2}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\ln\left(x^2-6\cdot x-40\right)$

4) $g(x)=\log\left(\sqrt{2x+4}-8\right)-12$

5) $h(x)=\frac{3\cdot x}{\ln\left(15-3\cdot x\right)}$

QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine quadratische Gleichung/ Funktion stellt graphisch gesehen immer eine **Parabel** dar $x^2 + p \cdot x + q = 0$.
Um eine quadratische Gleichung lösen zu können, bringt man diese auf die sogenannte **Nullform**.
Die Lösungen dieser Gleichung (**Schnittpunkte mit der x-Achse**) erhält man durch die folgenden Lösungsverfahren:

✓Quadratische Ergänzung: $(x+a)^2 + b = 0 \Rightarrow S(-a;b)$

✓p-q-Formel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

✓Satz von Vieta: $x^2 + p \cdot x + q = (x+a) \cdot (x+b) = 0$

P-Q-FORMEL

Um die p-q-Formel zu beweisen, nutzt man das Verfahren der quadratischen Ergänzung auf die allgemeine quadratische Gleichung der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Es ist darauf zu achten, dass zum einen durch **elementare Umformungen** die **NULL-Form** der Gleichung entsteht und zum anderen **kein Faktor** vor dem x^2 auftauchen darf.

<u>Beweis</u>: $x^2 + p \cdot x + q = 0$

Wurzel *Halbierung* *Subraktion des Quadrats*

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \qquad \left| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right.$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \left| \sqrt{\ } ; \right| - \frac{p}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

<u>Aufgabe</u>: Entwickeln Sie die Mitternachtsformel basierend auf $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

BEISPIELE

$$2 \cdot x^2 + 8 \cdot x = -6 \Leftrightarrow x^2 + 4 \cdot x + 3 = 0 \qquad | +6; | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4 \cdot x + 3 = (x+2)^2 - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 1 = 0 \\ (x+2)^2 = 1 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ x_1 = -3 \vee x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{quadratische Ergänzung}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4 \cdot x + 3 = 0; p = 4 \wedge q = 3 \\ x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} = -2 \pm 1 \\ x_1 = -3 \vee x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{p-q-Formel}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4 \cdot x + 3 = x^2 + (3+1) \cdot x + (3 \cdot 1) = 0 \\ (x+3) \cdot (x+1) = 0 \\ x_1 = -3 \vee x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{Satz von Vieta}$$

DIE PARABEL

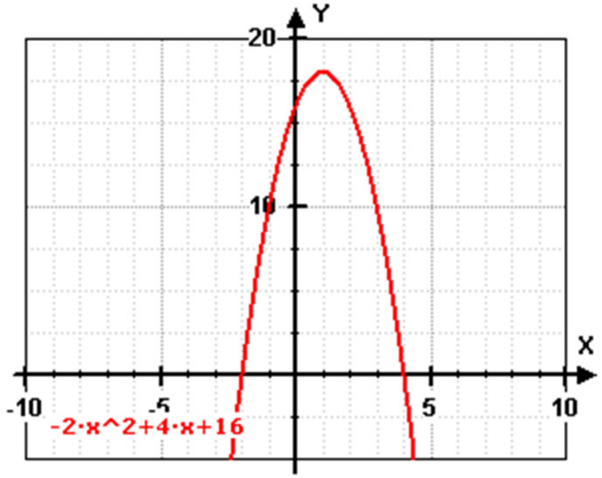
Bei einer Parabel handelt es sich um die graphische Darstellung einer quadratischen Funktion. Die relevanten Punkte bzw. der Verlauf kann bereits im Vorfeld näher bestimmt werden.

Allgemeine Form:	$f(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$
✓Verlauf:	gestreckt $\lvert\alpha\rvert > 1$ bzw. gestaucht $\lvert\alpha\rvert < 1$ nach oben geöffnet $\alpha > 0$ bzw. nach unten $\alpha < 0$
✓Achsenschnittpunkte:	y-Achse: $S_y(0/\gamma)$ bzw. x-Achse: $f(x) = 0$ (p-q-Formel)
✓Scheitelpunkt:	Scheitelpunktform: $f(x) = \alpha \cdot (x+a)^2 + b \Rightarrow S(-a;b)$ Tiefpunkt $\alpha > 0$ bzw. Hochpunkt $\alpha < 0$
✓Symmetrie:	Achsensymmetrie $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \gamma$ Sonst Symmetrie zur parallelen zum Scheitelpunkt

BEISPIEL

Funktionsgleichung:

$f(x) = -2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 16$



✓Verlauf: gestreckt, da $|\alpha| = |-2| > 1$
nach unten geöffnet, da $\alpha = -2 < 0$

✓Schnittpunkte: $S_y(0;16)$

$S_x : 0 = x^2 - 2 \cdot x - 8 = (x-4) \cdot (x+2)$ $S_{x_1}(-2;0); S_{x_2}(4;0)$

✓Scheitelpunkt: $f(x) = -2 \cdot \left((x-1)^2 - 1^2 - 8\right) = -2 \cdot (x-1)^2 + 18$
Scheitelpunkt (Hochpunkt): $S(1;18)$

✓Symmetrie: Achsensymmetrie zur Parallelen durch $x = 1$

BI-QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine **Bi-Quadratische Gleichung** $x^n + p \cdot x^{\frac{n}{2}} + q = 0$ ist dann vorhanden, wenn zwei Exponenten im Verhältnis 1:2 stehen und eine weitere Konstante existiert.

Nach der **Substitution** der Variablen stehen die bekannten Lösungsverfahren zur Verfügung und man erhält nach **Resubstitution** die Lösungsmenge.

Beispiel: $x^4 - 17 \cdot x^2 + 16 = 0$

<u>Substitution</u>: $z = x^2$

$$z^2 - 17 \cdot z + 16 = (z-16) \cdot (z-1) = 0$$

$$z_1 = 16 \vee z_2 = 1$$

<u>Resubstitution</u>: $x = \pm\sqrt{z}$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \vee x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 24 = 0$

2) $-0{,}5 \cdot x^2 + 2 \cdot x = -2{,}5$

3) $x \cdot (2 \cdot x - 20) = -32$

Wenden Sie je ein Verfahren an

II. Bestimmen Sie alle relevanten Eigenschaften der gegebenen Parabeln.

4) $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 3$

5) $g(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3$

6) $h(x) = 100 - 4 \cdot x^2$

- ✓Verlauf
- ✓Achsenschnittpunkte
- ✓Scheitelpunkt
- ✓Symmetrie

III. Bestimmen Sie die Lösung folgender Bi-Quadratischen Gleichungen.

7) $x^4 + 100 = 29 \cdot x^2$

8) $x^6 = 7 \cdot x^3 + 8$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

quadratische Ergänzung

Scheitelpunkt(form)

p-q-Formel

Parabel (Verlauf)

Satz von Vieta

Kettenregel

höhere Funktion

biquadratische Gleichung

(Re)substitution