VORKURS

22.09.2017

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Durch welchen Punkt verläuft jede Exponentialfunktion (Warum)?
- ✓ Wie kann man eine Ln-Funktion an beiden Achsen spiegeln?
- ✓ Worin besteht der Unterschied zwischen Ergebnis und Lösung?
- ✓ Wie verläuft die ln(x)-Funktion im Vergleich zu Log(x)?
- ✓ Welchen Einfluss hat die Basis auf eine Exponentialfunktion?
- ✓ Was bewirkt das Addieren einer Konstanten zu einer Funktion?
- ✓ Welchen Definitions-/ Wertebereich hat die LN-Funktion?
- ✓ Wie machen Sie die Basis zum Logarithmus passend?

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $\frac{1}{4}\cdot\log(256x^8)-2\log\frac{\sqrt{9}}{x^2}-0{,}5\cdot\log\frac{x^4}{9}=1{,}5\cdot\log(9x^4)+3\cdot\log\frac{1}{2x^3}+4\cdot\log\sqrt{27\cdot x}$

2) $6\cdot\ln\sqrt[3]{3}-4\cdot\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{x}}+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{9}{x}\right)=2\cdot\ln\frac{\sqrt{x^3}}{3}-0{,}25\cdot\ln(16x^8)+3\cdot\ln\frac{8}{x^2}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\ln\left(x^2-6\cdot x-40\right)$

4) $g(x)=\log\left(\sqrt{2x+4}-8\right)-12$

5) $h(x)=\frac{3\cdot x}{\ln\left(15-3\cdot x\right)}$

QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine quadratische Gleichung/ Funktion stellt graphisch gesehen immer eine **Parabel** dar $x^2 + p \cdot x + q = 0$.
Um eine quadratische Gleichung lösen zu können, bringt man diese auf die sogenannte **Nullform**.
Die Lösungen dieser Gleichung (**Schnittpunkte mit der x-Achse**) erhält man durch die folgenden Lösungsverfahren:

✓Quadratische Ergänzung: $(x+a)^2 + b = 0 \Rightarrow S(-a;b)$

✓p-q-Formel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

✓Satz von Vieta: $x^2 + p \cdot x + q = (x+a) \cdot (x+b) = 0$

P-Q-FORMEL

Um die p-q-Formel zu beweisen, nutzt man das Verfahren der quadratischen Ergänzung auf die allgemeine quadratische Gleichung der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Es ist darauf zu achten, dass zum einen durch **elementare Umformungen** die **NULL-Form** der Gleichung entsteht und zum anderen **kein Faktor** vor dem x^2 auftauchen darf.

<u>Beweis</u>:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Wurzel *Halbierung* *Subraktion des Quadrats*

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \qquad \left| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \right.$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \left| \sqrt{} ; \right| - \frac{p}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

<u>Aufgabe</u>: Entwickeln Sie die Mitternachtsformel basierend auf $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

BEISPIELE

$$2\cdot x^2+8\cdot x=-6 \Leftrightarrow x^2+4\cdot x+3=0 \qquad |+6;|\cdot\frac{1}{2}$$

$$x^2+4\cdot x+3=(x+2)^2-2^2+3=(x+2)^2-1=0$$
$$(x+2)^2=1 \Rightarrow x+2=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$
$$x_1=-3 \vee x_2=-1$$

quadratische Ergänzung

$$x^2+4\cdot x+3=0;\ p=4 \wedge q=3$$
$$x_{1/2}=-\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-3}=-2\pm 1$$
$$x_1=-3 \vee x_2=-1$$

p-q-Formel

$$x^2+4\cdot x+3=x^2+(3+1)\cdot x+(3\cdot 1)=0$$
$$(x+3)\cdot(x+1)=0$$
$$x_1=-3 \vee x_2=-1$$

Satz von Vieta

DIE PARABEL

Bei einer Parabel handelt es sich um die graphische Darstellung einer quadratischen Funktion. Die relevanten Punkte bzw. der Verlauf kann bereits im Vorfeld näher bestimmt werden.

Allgemeine Form: $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$

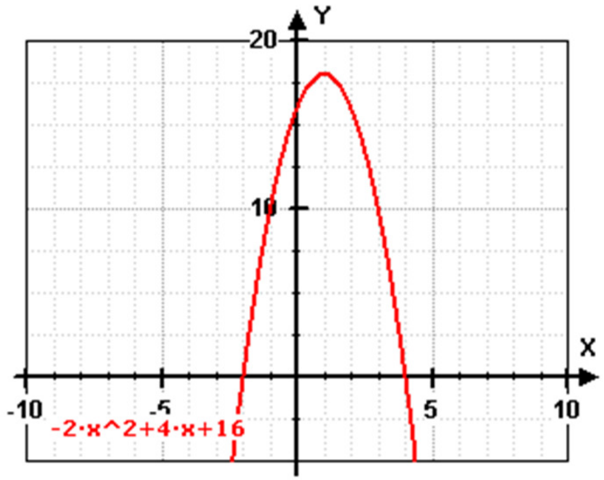
✓Verlauf: gestreckt $|\alpha| > 1$ bzw. gestaucht $|\alpha| < 1$
nach oben geöffnet $\alpha > 0$ bzw. nach unten $\alpha < 0$

✓Achsenschnittpunkte: y-Achse: $S_y(0/\gamma)$ bzw. x-Achse: $f(x) = 0$ (p-q-Formel)

✓Scheitelpunkt: Scheitelpunktform: $f(x) = \alpha \cdot (x + a)^2 + b \Rightarrow S(-a;b)$
Tiefpunkt $\alpha > 0$ bzw. Hochpunkt $\alpha < 0$

✓Symmetrie: Achsensymmetrie $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \gamma$
Sonst Symmetrie zur parallelen zum Scheitelpunkt

BEISPIEL



Funktionsgleichung:

$f(x) = -2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 16$

✓Verlauf: gestreckt, da $|\alpha| = |-2| > 1$
nach unten geöffnet, da $\alpha = -2 < 0$

✓Schnittpunkte: $S_y(0;16)$
$S_x: 0 = x^2 - 2 \cdot x - 8 = (x-4) \cdot (x+2) \quad S_{x_1}(-2;0); S_{x_2}(4;0)$

✓Scheitelpunkt: $f(x) = -2 \cdot \left((x-1)^2 - 1^2 - 8\right) = -2 \cdot (x-1)^2 + 18$
Scheitelpunkt (Hochpunkt): $S(1;18)$

✓Symmetrie: Achsensymmetrie zur Parallelen durch $x = 1$

BI-QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine **Bi-Quadratische Gleichung** $x^n + p \cdot x^{\frac{n}{2}} + q = 0$ ist dann vorhanden, wenn zwei Exponenten im Verhältnis 1:2 stehen und eine weitere Konstante existiert.

Nach der **Substitution** der Variablen stehen die bekannten Lösungsverfahren zur Verfügung und man erhält nach **Resubstitution** die Lösungsmenge.

Beispiel: $x^4 - 17 \cdot x^2 + 16 = 0$

<u>Substitution</u>: $z = x^2$

$$z^2 - 17 \cdot z + 16 = (z - 16) \cdot (z - 1) = 0$$

$$z_1 = 16 \vee z_2 = 1$$

<u>Resubstitution</u>: $x = \pm\sqrt{z}$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \vee x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 24 = 0$

2) $-0{,}5 \cdot x^2 + 2 \cdot x = -2{,}5$

3) $x \cdot (2 \cdot x - 20) = -32$

Wenden Sie je ein Verfahren an

II. Bestimmen Sie alle relevanten Eigenschaften der gegebenen Parabeln.

4) $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x - 3$

5) $g(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3$

6) $h(x) = 100 - 4 \cdot x^2$

✓Verlauf
✓Achsenschnittpunkte
✓Scheitelpunkt
✓Symmetrie

III. Bestimmen Sie die Lösung folgender Bi-Quadratischen Gleichungen.

7) $x^4 + 100 = 29 \cdot x^2$

8) $x^6 = 7 \cdot x^3 + 8$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?