VORKURS

13.09.2017

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wo liegt der Unterschied zwischen dem 1. und 2. Binom?
- ✓ Wie nutzt man das 1./2. Binom zum Kopfrechnen?
- ✓ Für was kann man das 3. Binom nutzen?
- ✓ Was bedeutet das Störprinzip in der Arithmetik?
- ✓ Was bewirkt ein Parameter in einer Funktionenschar?
- ✓ Was ist eine Tautologie in der Arithmetik?
- ✓ Wie hängt der Koeffizient mit der Variablen zusammen?
- ✓ Was ist die Nullform einer Gleichung?

AUFGABEN

a) $(2x - 0{,}1y)^2$

b) $(ax + 3y)^2$

c) $(2x - 0{,}5xy)(0{,}5xy + 2x)$

d) $\left(2cd - \frac{3}{c}d\right)^2$

e) $\left(\frac{x}{4} + 2xy\right)^2$

f) $\left(\frac{1}{3}x - 0{,}1y\right)\left(0{,}1y + \frac{1}{3}x\right)$

g) $(2i - 5)^2$

h) $(0{,}4i + 8)^2$

i) $\left(\frac{1}{4}i - 0{,}2x\right)\left(0{,}2x + \frac{1}{4}i\right)$

1) $3 \cdot (2y + \frac{1}{3}x)(\frac{1}{3}x - 2y) - 4 \cdot (\frac{2}{y}x + 3y)^2$

2) $(3b - ab)(3b + ba) - (a - 2b)^2$

3) $\frac{3\sqrt{x} + 2}{1 + \sqrt{3x}}$

4) $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{3x} - 4}$

(3) und 4)): machen Sie den Nenner rational

5) $\lim\limits_{x \to -3}\left(\frac{2x + 6}{6 - 2\sqrt{3 - 2x}}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to 6}\left(\frac{x^2 - 4x - 12}{2\sqrt{2x + 4} - 8}\right)$

PASCAL'SCHE DREIECK I

Exponent (n)	$(a+b)^n$
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

Elemente in der 7. Zeile:

Ganz links: 1

Nebenan: 7, denn $1+6=7$

Nebenan: 21, denn 6+$15=21$

Nebenan: 35, denn $15+20=35$

Somit ergibt sich für die 7. Zeile die folgende Struktur:

$$1-7-21-35-35-21-7-1$$

PASCAL'SCHE DREIECK II

Methode des Pascall'schen Dreiecks:

1. Koeffizienten:

Sie gehen an die richtige Zeile des Pascall'schen Dreiecks und schreiben die Koeffizienten mit einem »+« versehen ab.

2. Linke Variable:

Jetzt nehmen Sie den linken Teil der Summe und notieren diesen **in Klammern** hinter die Koeffizienten des ersten Schritts. Anschließend schreiben Sie von **links** anfangend den **höchsten** Exponenten **minus eins** bis zum Exponenten Null über die linke Variable.

3. Rechte Variable:

Nun benutzen Sie den rechten Teil der Summe. Diesen Ausdruck schreiben Sie ebenfalls **in Klammern** hinter den Term aus Schritt zwei. Weil es ja die rechte Variable ist, fangen Sie jetzt auf der **rechten Seite** mit dem **höchsten** Exponenten an und enden auf der linken Seite mit der Null.
Schon sind Sie fertig und können den entstandenen Ausdruck berechnen und zusammenfassen.

AUFGABEN

1) $(2x+\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{6}+x)^2$

2) $(2x-\frac{1}{4})^4-(4-x)^3$

3) $\left(2x^2-\frac{0{,}5}{x}\right)^4-\frac{1-16x^3}{16x^4}$

4) $z=(2+i)^5$

5) $z=(2i-0{,}5)^4$

TEILBARKEIT

Eine ganze Zahl *a* ist dann durch eine ganze Zahl *b* teilbar, wenn das Ergebnis *q* der Division ebenfalls eine ganzen Zahlen ist, so dass man die Teilbarkeitsrelation wie folgt definieren kann:

$$| = \{(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in Z \times Z \mid b = q \cdot a; q \in Z\}$$

In der Mathematik nutzt man anstelle von $(a,b) \in |$ primär die Infix-Notation $a|b$ (gesprochen: *a* teilt *b*).

Daraus ergeben sich die folgenden Regeln / Zusammenhänge:

- Transitivität: $a|b \ \wedge b|c \quad \rightarrow a|c$
- Kürzbarkeit: $c \cdot a|c \cdot b \quad \rightarrow a|b; c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
- Produktregel: $a|b \ \wedge c|d \quad \rightarrow a \cdot c|b \cdot d$
- Linearität: $a|b_1 \ \wedge a|b_2 \quad \rightarrow a|m \cdot b_1 + n \cdot b_2; m,n \in \mathbb{Z}$

DIVISION MIT REST

Bei einer ganzzahligen Division mit Rest werden zwei Zahlen $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{a} \neq 0$ betrachtet. Bei der Division entstehen immer zwei eindeutige Zahlen $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathbb{Z}$, so dass die größere Zahl *b* stets als *Produkt + Rest* beschrieben werden kann.

$$b = q \cdot a + r \quad mit \quad 0 \leq q < |a|$$

Als ganzzahlige Division von *b* und *a* erhält man demzufolge *q* und es gilt: $\frac{b}{Z^a} = q$

Diese Definition des Rests haben wir bereits auf Seite 7 mit der Modulo-Operation kennen gelernt. Bei der Modulo-Operation erhalten wir nur den Rest der Division.

Beispiel: $a = 8; b = 115$

$115 = 112 + 3 = 14 \cdot 8 + 3 \Rightarrow q = 14, r = 3$

Es gilt demzufolge: $\frac{115}{Z^8} = 14$ und $115\ mod\ 8 = 3$

GRÖßTER GEMEINSAMER TEILER

ggT: größter gemeinsamer Teiler:

Beim größten gemeinsamen Teiler sucht man die größtmögliche natürliche Zahl, die zwei oder mehr Zahlen ganzzahlig teilt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $d|a$ und $d|b$, wodurch *d* ein gemeinsamer Teiler von *a* und *b* sein muss.
Wenn jetzt für jeden anderen gemeinsamen Teiler *c* von *a* und *b* gilt, dass c$|d$, dann ist *d* auch der größte gemeinsame Teiler von *a* und *b*:

$$d = ggT(a, b)$$

Haben zwei Zahlen als größten gemeinsamen Teiler nur die eins, so dass $ggT(a, b) = 1$ gilt, so sind die Zahlen teilerfremd.

KLEINSTES GEMEINSAMES VIELFACHES

kgV: kleinstes gemeinsames Vielfaches:

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Pendant zum zuvor definierten ggT.

Es wird hier eine möglichst kleine natürliche Zahl gesucht, die das Vielfache zweier Zahlen darstellt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $a|d$ und $b|d$, wodurch *d* ein gemeinsames Vielfaches von *a* und *b* sein muss.
Wenn jetzt für jedes andere gemeinsame Vielfache *c* von *a* und *b* gilt, dass $d|c$, dann ist *d* auch das kleinste gemeinsame Vielfache von *a* und *b*:

$$d = kgV(a, b)$$

Für die Berechnungen des ggT(a,b) und auch kgV(a,b) nutzt man u.a. das Verfahren der Primfaktorzerlegung.

PRIMFAKTORZERLEGUNG I

<u>Primzahl:</u>

Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist eine Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist: $P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \dots\}$

<u>Primfaktorzerlegung:</u>

Eine natürliche Zahl $p > 1$ kann als Produkt von Primzahlen dargestellt werden. Sortiert man diese Primfaktoren, so erhält man die kanonische Darstellung.

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$$

Für die Zerlegung faktorisiert man die Ausgangszahl und startet bei der kleinsten Primzahl und fass anschließend gleiche Faktoren zusammen.

$$504 = 2 \cdot 252 = 2 \cdot 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2^3 \cdot 63$$
$$63 = 3 \cdot 21 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$$

$$\Rightarrow 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

PRIMFAKTORZERLEGUNG II

Anwendung auf ggT(a,b) und kgV(a,b):

Im ersten Schritt zerlegt man die zu betrachtenden Zahlen in deren Primfaktoren.

$$160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^5 \cdot 5$$
$$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$$

ggT - Bestimmung:

Zur Berechnung des ggT fasst man die gleichen Primfaktoren als Produkt zusammen:

$$\Rightarrow ggT(160,144) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

kgV - Bestimmung:

Zur Berechnung des kgV nimmt man die am häufigsten vorkommenden Primfaktoren und setzt diese zu einem Produkt zusammen:

$$\Rightarrow kgV(160,144) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 32 \cdot 9 \cdot 5 = 1.440$$

AUFGABEN

1. Zerlegen Sie die gegebenen Zahlen im ersten Schritt in deren Primfaktoren und bestimmen anschließend den größten gemeinsamen Teiler ggT sowie das kleinste gemeinsame Vielfache kgV.

   a) $a = 3.528 \wedge b = 3.780$

   b) $a = 776.160 \wedge b = 2.494.800$

   c) $a = 1.008 \wedge b = 1.080 \wedge c = 2.940$

EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, kann man den ggT(a,b) einfach bestimmen.

Es gilt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$

1. Berechnung der ganzzahligen Division mit Rest: $b = q \cdot a + r \quad mit \quad 0 \leq q < |a|$

2.1. Ist $r \neq 0$, dann ersetze $b \coloneqq a$ und $a \coloneqq r$ und Starte wieder bei 1.

2.2. Ist $r = 0$, dann ist a der gesuchte Wert vom ggT(a,b).

Beispiel: $ggT(1.264\,,\ 616)$

$$
\begin{aligned}
1.264 \quad &= 2 \cdot 616 + 32 \\
616 \quad &= 19 \cdot 32 + 8 \\
32 \quad &= 4 \cdot 8 + 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow ggT(1.264\,, 616) = 8$$

AUFGABEN

1. Wenden Sie bei den folgenden Aufgaben den Euklidischen Algorithmus an und bestimmen somit den ggT.

a) $a = 840 \wedge b = 980$

b) $a = 975 \wedge b = 2.340$

c) $a = 96.096 \wedge b = 1.092$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?