Vorkursklausur 2014

Name:______________________________
Mat.-Nr.:___________________________
Email:______________________________

1. <u>Mengenlehre (12 Punkte):</u>
Gegeben sind die Menge $A = \{8; 10; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28\}$ und die Menge B der natürlichen Zahlen (größer 11 und kleiner gleich 30), die durch 2 und gleichzeitig durch 3 teilbar sind.
Bestimmen Sie die Lösungen (2-mal Aufzählung <u>und</u> 2-mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

2. <u>Aussagenlogik (8 Punkte):</u>
Sind die Ausdrücke $A_1(a,b,c) = (a \wedge b) \vee (\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c)$ und $A_2(a,b,c) = \big((c \wedge b) \vee (b \wedge a)\big) \vee (a \wedge c)$ identisch bzw. äquivalent zueinander?
Erstellen Sie hierzu eine Wahrheitstabelle und begründen Sie Ihre Antwort.

3. <u>Bruchrechnung (8 Punkte):</u>

a) $3 - \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1}{a}\right) - \frac{3}{10} + \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) + 1{,}3$ b) $\dfrac{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{4x}}{\frac{1}{4xy} - \frac{1}{8x^2}}$

4. <u>Komplexe Zahlen (8 Punkte):</u>

Lösen Sie die Gleichung $8 \cdot z = (2+i)^4 - (3-4i) \cdot (3+4i)$ und geben die Lösung in der Form $z = a + bi$ an.
Bestimmen Sie ferner noch den Betrag und das Argument der komplexen Zahl.

5. <u>Arithmetik (8 Punkte):</u>
Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $\left(\frac{1}{ba}\right)^2 \cdot \left[(1+ab)^4 - (2ab+1)^2\right] - ab \cdot (ab+4)$

b) $3 \cdot (2\mathrm{a} - (3\mathrm{b} + 2 \cdot (\mathrm{a} - (\mathrm{c} + 4\mathrm{a}) + c) - 2 \cdot (3a - b)) + 5b)$

6. <u>Exponential-/Logarithmusrechnung (8 Punkte):</u>
Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitestgehend:

a) $\dfrac{\sqrt[3k]{x^{2k+3}}}{\sqrt[3]{\sqrt[k]{x^{4k-5}}}} : \left(\sqrt[6k]{\left(x^{1-k}\right)^4}\right)^4$ b) $0{,}001^{2 \cdot \log 0{,}5} - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{-6 \cdot ld 3} + 8 \cdot \ln \sqrt[4]{e} - 0{,}25 \cdot ld \frac{1}{256} + \left(\sqrt{e}\right)^{3 \cdot \ln 9} + 4 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{1000}}$

7. <u>Parabelfunktion (8 Punkte):</u>
Berechnen Sie den Scheitelpunkt, die Schnittpunkte mit beiden Achsen und beschreiben den Verlauf der Parabeln.

a) $f(x) = 3 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 63$ b) $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + x + 8$

8. <u>Ungleichungen (8 Punkte):</u>
Berechnen Sie den Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen.

a) $-3 \cdot (4 + 2x) \geq |12 - 4x| + 20$ b) $\dfrac{5 \cdot (x^2 - 16)}{2 - x} \geq 2 - 5x$

9. <u>Gleichungen mit einer Unbekannten (8 Punkte):</u>
Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie – sofern erforderlich – den Definitionsbereich an.

a) $x^2 \cdot (x+1) - 2x = 15 \cdot (x-1)$ b) $x^6 - 1.000 \cdot x^3 = 64 \cdot (x^3 - 1.000)$

10. <u>Lineare Gleichungssysteme (16 Punkte):</u>
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left|\begin{array}{l} 0{,}5x + y = 3 \\ y + 3 = x \end{array}\right|$ graphisch

b) $\left|\begin{array}{c} 2x - y + 3z = 7 \\ -2x + 2y - 5z = -10 \\ 4x - 5y + 8z = 15 \end{array}\right|$ Gauß-Verfahren

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}x - 2y = 6 \\ 2x + 5y = 2 \end{array}\right|$ beliebig

11. <u>Trigonometrie (8 Punkte):</u>

Gegeben sei die Funktion mit $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}(x + 7{,}5\pi)\right) + 4$.

Bestimmen und beweisen Sie die Periode, Symmetrie und Amplituden(Wertebereich) von $f(x)$.

Musterlösung Vorkursklausur 2014 (Fulda)

1) Menge A: $A = \{8; 10; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28\}$
   Menge B: $B = \{12; 18; 24; 30\}$

   a) $A \cap B$: $\{18; 24\}$
   b) $A \cup B$: $\{x \in \mathbb{N} | (x \geq 8 \wedge x \leq 30) \wedge x mod\ 2 = 0\}$
   c) $A \backslash B$: $\{x \in \mathbb{N} \backslash \{12; 18; 24\} | x mod 2 = 0 \wedge (x \geq 8 \wedge x \leq 30)\}$
   $\{8; 10; 14; 16; 20; 22; 26; 28\}$
   d) $B \backslash A$: $\{x \in \mathbb{N} \backslash \{18; 24\} | x mod 6 = 0 \wedge (x \geq 12 \wedge x \leq 30)\}$
   $\{12; 30\}$

2) Formel 1: $A_1(a,b,c) = (a \wedge b) \vee (\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c)$

   Formel 2: $A_2(a,b,c) = ((b \wedge c) \vee (b \wedge a)) \vee (a \wedge c)$

   Es ist die Äquivalenz zu zeigen: $(a \wedge b) \vee (\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c) \leftrightarrow ((b \wedge c) \vee (b \wedge a)) \vee (a \wedge c)$

   Wahrheitstabelle:

a	W	W	W	W	F	F	F	F
b	W	W	F	F	W	W	F	F
c	W	F	W	F	W	F	W	F
$(a \wedge b)$	W	W	F	F	F	F	F	F
$(a \leftrightarrow b)$	W	W	F	F	F	F	W	W
$\neg(a \leftrightarrow b)$	F	F	W	W	W	W	F	F
$\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c$	F	F	W	F	W	F	F	F
$(a \wedge b) \vee (\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c)$	**W**	**W**	**W**	**F**	**W**	**F**	**F**	**F**
$(b \wedge c)$	W	F	F	F	W	F	F	F
$(b \wedge a)$	W	W	F	F	F	F	F	F
$(b \wedge c) \vee (b \wedge a)$	W	W	F	F	W	F	F	F
$(a \wedge c)$	W	F	W	F	F	F	F	F
$((b \wedge c) \vee (b \wedge a)) \vee (a \wedge c)$	**W**	**W**	**W**	**F**	**W**	**F**	**F**	**F**
$A_1(a,b,c) \leftrightarrow A_2(a,b,c)$	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**

   Es gilt $E[A] = Bool^3$ und somit handelt es sich um eine Tautologie, wodurch die Äquivalenz der Aussagen bzgl. der Schaltung gilt, d.h. sie sind identisch: $A_1(a,b,c) \Leftrightarrow A_2(a,b,c)$

3) a) $3-\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{1}{a}\right)-\frac{3}{10}+\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)+1{,}3=3-1-\frac{1}{2a}-\frac{3}{10}+\frac{3}{2a}-\frac{1}{a}+\frac{13}{10}=\frac{20a-5-3a+15-10+13a}{10a}=\frac{30a}{10a}=3$

b) $$\frac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{4x}}{\frac{1}{4xy}-\frac{1}{8x^2}}=\frac{\frac{4x^2-4xy+y^2}{4xy}}{\frac{2x-y}{8x^2y}}=\frac{(2x-y)^2}{4xy}\cdot\frac{8x^2y}{2x-y}=(2x-y)\cdot 2x=4x^2-2xy$$

4) $$8\cdot z=(2+i)^4-(3-4i)\cdot(3+4i)$$
$$8\cdot z=\left(1\cdot 2^4\cdot i^0+4\cdot 2^3\cdot i^1+6\cdot 2^2\cdot i^2+4\cdot 2^1\cdot i^3+1\cdot 2^0\cdot i^4\right)-\left(3^2-(4i)^2\right)$$
$$8\cdot z=(16+32i-24-8i+1)-(25)=-32+24i\Rightarrow z=-4+3i$$

<u>Betrag</u>: $\Rightarrow z: r=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

<u>Argument</u>: $\Rightarrow z:\alpha=\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi$

5) a) $$\left(\frac{1}{ba}\right)^2\cdot\left[(1+ab)^4-(2ab+1)^2\right]-ab\cdot(ab+4)=$$

$$\frac{1}{a^2b^2}\cdot\left[1+4ab+6a^2b^2+4a^3b^3+a^4b^4-\left(4a^2b^2+4ab+1\right)\right]-a^2b^2-4ab$$

$$\frac{1}{a^2b^2}\cdot\left[2a^2b^2+4a^3b^3+a^4b^4\right]-a^2b^2+4ab=2+4ab+a^2b^2-a^2b^2-4ab=2$$

b) $$3\cdot\left(2\mathrm{a}-\left(3\mathrm{b}+2\cdot(\mathrm{a}-(\mathrm{c}+4\mathrm{a})+c)-2\cdot(3a-b)\right)+5b\right)=$$
$$3\cdot\left(2a-\left(3b+2a-2\cdot(4a+c)+2c-6a+2b\right)+5b\right)=3\cdot\left(2a-(5b-12a)+5b\right)=3\cdot 14a=42a$$

6) a) $$\frac{\sqrt[3k]{x^{2k+3}}}{\sqrt[3]{\sqrt[k]{x^{4k-5}}}}:\left(\sqrt[6k]{\left(x^{1-k}\right)^4}\right)^4=\frac{x^{\frac{2k+3}{3k}}}{x^{\frac{4k-5}{3k}}}:x^{\frac{16-16k}{6k}}=x^{\frac{2k+3-(4k-5)-(8-8k)}{3k}}=x^{\frac{6k}{3k}}=x^2$$

b) $$0{,}001^{2\cdot\log 0{,}5}-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{-6\cdot ld 3}+8\cdot\ln\sqrt[4]{e}-0{,}25\cdot ld\,\frac{1}{256}+\left(\sqrt{e}\right)^{3\cdot\ln 9}+4\cdot\log\frac{1}{\sqrt{1000}}=$$
$$10^{-3\cdot 2\cdot\log 0{,}5}-2^{-\frac{2}{3}\cdot(-6)\cdot ld 3}+8\ln\left(e^{\frac{1}{4}}\right)-0{,}25\cdot ld\left(2^{-8}\right)+e^{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\ln 9}+4\cdot\log\left(10^{-\frac{3}{2}}\right)=$$
$$64-81+2+2+27-6=8$$

7) a) $f(x)=3\cdot x^2-30\cdot x+63=3\cdot\left(x^2-10x+21\right)=3\cdot(x-7)\cdot(x-3)$

Achsenschnittpunkte: $S_y=\left(0/63\right)\vee S_{x_1}(3/0)\vee S_{x_2}(7/0)$

Scheitelpunkt: $S=\left(5/f(5)\right)=\left(5/-12\right)$ ist ein Tiefpunkt, da 3 > 0

Verlauf: Die Parabel ist nach oben geöffnet, da 3 > 0
Die Parabel verläuft steiler, da |3| > 1

b) $f(x)=-\frac{1}{4}\cdot x^2+x+8=-\frac{1}{4}\cdot\left(x^2-4x-32\right)=-\frac{1}{4}\cdot(x+4)\cdot(x-8)$

Achsenschnittpunkte: $S_y=\left(0/8\right)\vee S_{x_1}(-4/0)\vee S_{x_2}(8/0)$

Scheitelpunkt: $S=\left(2/f(2)\right)=\left(2/9\right)$ ist ein Hochpunkt, da -0,25 < 0

Verlauf: Die Parabel ist nach unten geöffnet, da -0,25 < 0
Die Parabel verläuft flacher, da |-0,25| < 1

8) a) $-3\cdot(4+2x)\geq|12-4x|+20$

$x\geq 3$	$x<3$
$-12-6x\geq-(12-4x)+20 \Leftrightarrow -10x\geq 20 \Leftrightarrow x\leq -2$	$-12-6x\geq(12-4x)+20 \Leftrightarrow -2x\geq 44 \Leftrightarrow x\leq -22$
$x\geq 3\vee x\leq -2$	$x\leq -22$
Probe: $x=4\Rightarrow -3\cdot 12\geq\lvert -4\rvert+20 \Leftrightarrow -36\geq 24$	Probe: $x=-25\Rightarrow -3\cdot(-46)\geq\lvert 112+20\rvert \Leftrightarrow 138\geq 132$

$$L=\{x\in R\mid x\leq -22\}$$

b) $\frac{5\cdot\left(x^2-16\right)}{2-x}\geq 2-5x$

$x>2$	$x<2$
$5x^2-80\leq(2-5x)\cdot(2-x)=5x^2-12x+4\Leftrightarrow x\leq 7$	$5x^2-80\geq(2-5x)\cdot(2-x)=5x^2-12x+4\Leftrightarrow x\geq 7$
$x>2\wedge x\leq 7$	$x<2\vee x\geq 7$
Probe: $x=3\Rightarrow\frac{5\cdot(-7)}{-1}=35\geq -13$	Probe: $x=0\Rightarrow\frac{5\cdot(-16)}{2}=-40\geq 2$

$$L=\{x\in R\mid x>2\wedge x\leq 7\}$$

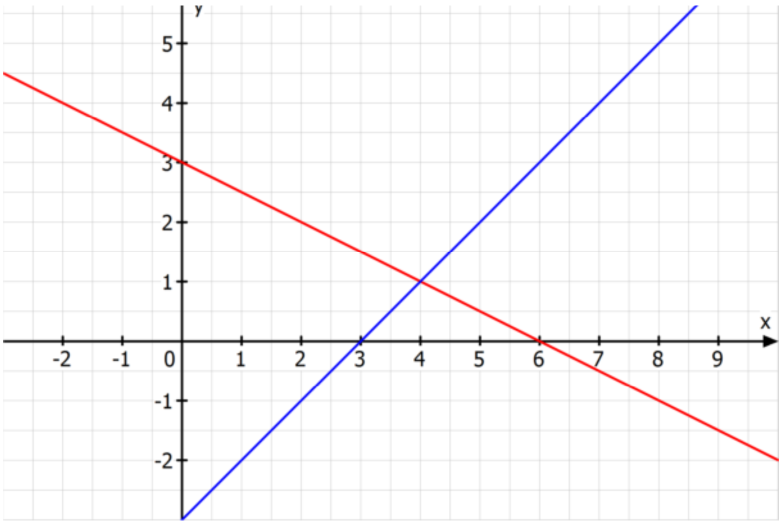
9) a) $x^2\cdot(x+1)-2x=15\cdot(x-1)\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=15x-15$
$x^3+x^2-17x+15=(x-1)\cdot(x+5)\cdot(x-3)=0$
$\Rightarrow L=\{-5;3;1\}$

b) $x^6-1.000\cdot x^3=64\cdot(x^3-1.000)\Leftrightarrow x^6-1.064\cdot x^3+64.000=0$

$(x^3-64)\cdot(x^3-1.000)=0\Rightarrow x_1^3=64\vee x_2^3=1.000$

$L=\{4;10\}$

10) a) $\left|\begin{matrix} 0{,}5x + y = 3 \\ y + 3 = x \end{matrix}\right| \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3 \wedge y = x - 3 \Rightarrow S(4/1)$



b) Gauß-Verfahren:

$$\left|\begin{matrix} 2x & - & y & + & 3\cdot z & = & 7 \\ -2x & + & 2\cdot y & - & 5\cdot z & = & -10 \\ 4\cdot x & - & 5\cdot y & + & 8\cdot z & = & 15 \end{matrix}\right| \quad \} \mid \cdot 1 \qquad \} \mid \cdot (2)$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix} -2x & + & 2\cdot y & - & 5\cdot z & = & -10 \\ 0 & + & y & - & 2\cdot z & = & -3 \\ 0 & - & y & - & 2\cdot z & = & -5 \end{matrix}\right| \quad \}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix} -2x & + & 2\cdot y & - & 5\cdot z & = & -10 \\ 0 & + & y & - & 2\cdot z & = & -3 \\ 0 & & 0 & - & 4\cdot z & = & -8 \end{matrix}\right| \Rightarrow L = \{(1;1;2)\}$$

c) Einsetzungsverfahren:

$$\left\|\begin{matrix} \frac{1}{3}x - 2y = 6 \\ 2x + 5y = 2 \end{matrix}\right\| \Rightarrow x = 6y + 18 \wedge 2\cdot(6y + 18) + 5y = 2$$

$$12y + 36 + 5y = 2 \Leftrightarrow 17y = -34 \Rightarrow L = ((6;-2))$$

11) $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}(x + 7{,}5\pi)\right) + 4$

Additionstheorem:

$$\sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot \cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + 4$$

Wertebereich:

$$-\frac{1}{2} \cdot [-1;1] + 4 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] + 4 \Rightarrow W = y \in \left[\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right]$$

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$$f(x) = f(-x)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + 4 = -\frac{1}{2} \cdot \cos\left(-\frac{1}{3}x\right) + 4$$
$$\cos\left(\frac{1}{3}x\right) = \cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$$

Periode: $P = 2\pi \cdot \frac{3}{1} = 6\pi$

$$f(x) = f(x + 6\pi)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + 4 = -\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot (x + 6\pi)\right) + 4$$

$$\cos\left(\frac{1}{3}x\right) = \cos\left(\frac{1}{3}x + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot \cos(2\pi) - \sin\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot \sin(2\pi) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot 1 - \sin\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot 0 = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$$