TUTORIUM

03.12.2018

AUFGABEN I

1) Bestimmen Sie zu den gegebenen Folgen deren Monotonieverlauf und die zugehörigen Schranken und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion. Begründen Sie ferner die Konvergenz der Folgen und berechnen deren Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{5n-2}{3-2n}; n \in \mathbb{N}$

b) $a_{n+1} = \dfrac{1}{4} \cdot (2a_n - 8); a_1 = 2$

c) $c_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 5; n \in \mathbb{N}_0$

Schranke $a_1 = 3$ ist obere Schranke

$a_n \le 3$ $a_1 \le 3$ ✓

$a_{n+1} \le 3$ $\frac{5(n+1)-2}{3-2(n+1)} = \frac{5n+3}{-2n+1} \le 3$ $| \cdot (-2n+1)$

$5n+3 \le -6n+3$

$11n \le 0$

$n \le 0$ ↯

$a_n \ge -8$

$\frac{5n+3}{-2n+1} \ge -8$

$5n+3 \ge 16n-8$

$-11n \ge -11$

$n \le 1$ ↯

$c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 5 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$

$c_0 = -4 \qquad c_1 = -4\frac{1}{3} \qquad c_2 = -4\frac{5}{9}$

$c_{n+1} < c_n$

$n = 0 \qquad c_1 < c_0 \qquad -4\frac{1}{3} < -4 \qquad \checkmark$

$n+1 \qquad c_{n+2} < c_{n+1}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - 5 < \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5 \qquad / +5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 < \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \qquad / : \left(\frac{2}{3}\right)^n <> 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} < \frac{2}{3} = \frac{6}{9} \qquad \checkmark$$

Da c_n streng monoton fallend ist, muss $c_0 = -4$

obere Schranke sein. $c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 5$

$c_n > -5$ (untere Schranke)

$n=0$ $c_0 = -4 > -5$ ✓

$n+1$: $c_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5 > -5 \quad | +5$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > 0 \quad | \sqrt[n+1]{}$

$\frac{2}{3} > 0$ ✓

$\lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 5 = 0 - 5 = -5$

Quotientenverfahren: $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5}$

$$\dfrac{\overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1}^{a \cdot \frac{2}{3}} - 5}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5} = \dfrac{\overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5}^{1 \cdot a} - \overbrace{\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\frac{1}{3} a}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5}$$

$$\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5} - \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5} < 1 \quad \Rightarrow \text{fallend}$$

$$\tfrac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{x} = 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 1\tfrac{3}{4} \sqrt[3]{x}$$

Differenzmethode

$$c_{n+1} - c_n < 0$$

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} - 5 - \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^n - 5\right)$$

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} - 5 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^n + 5$$

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(\tfrac{2}{3}\right)^n = \underbrace{\underbrace{\left(\tfrac{2}{3}\right)^n}_{>0} \underbrace{\left(\tfrac{2}{3} - 1\right)}_{<0}}_{<0}$$

$\Rightarrow$ fallend