MATHEMATIK

31.01.2019

VOKABELN VOM 28.01.2019

Ausgangsfunktion
erste Ableitung
zweite Ableitung
Potenzterme
Produktregel
Quotientenregel
Tangente
Sekante
Geradengleichung

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann existiert ein reiner Potenzausdruck?
- ✓ Wie leitet man eine Wurzel ab?
- ✓ Was bewirkt ein negativer Exponent?
- ✓ Wann setzt man die Produktregel ein?
- ✓ Wie ist die Ableitung von Sinus bzw. Cosinus definiert?
- ✓ Warum ist die Funktion e^x eine besondere Funktion?
- ✓ Wie lautet die Ableitung der LN-Funktion?
- ✓ Wie funktioniert die Quotientenregel?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wiederholungsaufgaben zu den Ableitungsregeln?
- ✓ Was versteht man unter einer Kondomfunktion?
- ✓ Warum muss man immer die Kettenregel verwenden?
- ✓ Was versteht man unter Extremwertaufgaben?
- ✓ Worin unterscheiden sich Haupt- und Nebenbedingung?
- ✓ Wie kommt man von dem Graphen einer Funktion zur Gleichung?
- ✓ Wie funktioniert das Gauß‘sche Eliminationsverfahren?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen die 1. Ableitung und bestimmen jeweils den zugehörigen Definitionsbereich.

1) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^5}} + 2\sqrt[3]{x^4}$

2) $f(x) = \frac{2}{x^6} + 5 \cdot \frac{1}{x^3}$

3) $f(x) = 2 \cdot \cos^2(x)$

4) $f(x) = (3x^4 - \frac{2}{x^2}) \cdot 3\ln(x)$

5) $f(x) = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x^5}$

6) $f(x) = \frac{4 \cdot (x - 2x^4)}{3\cos(x)}$

KETTENREGEL

Sofern die Ableitung von einer **höherwertigen Funktion** gebildet werden soll, muss die Kettenregel angewandt werden.
Diese besagt, dass man mit der **äußersten Ableitung** beginnt und sich anschließend **mittels Produkt** Stück für Stück via Ableitungen zu der **innersten Funktion** nähert.

$$\boxed{f(x) = g[h(x)] \Rightarrow f'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)}$$

Beispiel:

$$f(x) = \sin(e^{4-3x})$$

$$[\sin(\alpha)]' = \cos(\alpha)$$

$$f'(x) = \cos(e^{4-3x}) \cdot [(e^{4-3x})]'$$

$$[e^{\alpha}]' = e^{\alpha}$$

$$f'(x) = \cos(e^{4-3x}) \cdot (e^{4-3x}) \cdot [4-3x]'$$

$$[\alpha \cdot x^n]' = \alpha \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$f'(x) = \cos(e^{4-3x}) \cdot (e^{4-3x}) \cdot (-3)$$

KONDOM-FUNKTION I

Eine **Kondom-Funktion** (höherwertige Funktion) ist dann vorhanden, wenn eine Funktion über eine andere Funktion **gestülpt** wird. (siehe Kettenregel).

✓Potenzfunktion:

$$\boxed{f(x) = [g(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = (x^3 - 4x)^3$$
$$f'(x) = 3 \cdot (x^3 - 4x)^2 \cdot [x^3 - 4x]'$$
$$= 3 \cdot (x^3 - 4x)^2 \cdot (3x^2 - 4)$$

✓Trigonometriefunktion:

$$\boxed{f(x) = \sin[g(x)] \Rightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = \sin(0{,}5x^2)$$
$$f'(x) = \cos(0{,}5x^2) \cdot [0{,}5x^2]'$$
$$= \cos(0{,}5x^2) \cdot x$$

$$\boxed{f(x) = \cos[g(x)] \Rightarrow f'(x) = -\sin(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = 2 - 3 \cdot \cos(3 - 4x)$$
$$f'(x) = 3 \cdot \sin(3 - 4x) \cdot [3 - 4x]' = -12 \cdot \sin(3 - 4x)$$

KONDOM-FUNKTION II

✓Logartihmusfunktion:

$$\boxed{f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

$$f(x) = \ln(\cos(x))$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot [\cos(x)]' = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\tan(x)$$

✓Exponentialfunktion:

$$\boxed{f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = e^{3 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = e^{3 \cdot \sqrt{x}} \cdot [3 \cdot \sqrt{x}]' = e^{3 \cdot \sqrt{x}} \cdot \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Diese vier Funktionsklassen repräsentieren nahezu alle höherwertige Funktionen, wobei auch bei einer Verschachtelung von mehrerer dieser Funktionen immer die Kettenregel anzuwenden ist.

AUFGABEN

Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die ersten Ableitungen

1) $f(x) = 2 \cdot \sin(3x^3 - 5\sqrt{x})$

2) $g(x) = \ln(\frac{3}{x^3})$

3) $h(x) = 2(x^3 - \sin(4x))^5$

4) $k(x) = \sqrt[3]{e^{2x+} \quad - 4} \cdot \sin(3x)$

5) $l(x) = \ln(\sin(4x)) \cdot \sqrt{x^2 - 3x}$

6) $m(x) = \frac{(\sqrt{3x^3} + 2)^2}{5 \cdot \cos(3x - e^{2x})}$

EXTREMWERTPROBLEME I

Ein wirtschaftliches Anwendungsgebiet im Bereich der Analysis stellen sogenannte **Extremwertprobleme** dar. Dabei werden stets Größen einer Sachaufgabe gesucht, die ein **Minimum** bzw. ein **Maximum** darstellen.

Durch eine solche Problemstellungen existieren:

- <u>Hauptbedingung</u>:
  Dies ist eine mathematische Formel, die die gesuchte Größe (Frage) beschreibt und in der Regel von mehreren Variablen abhängig ist.

- <u>Nebenbedingung</u>:
  Hier werden die gegebenen Rahmenbedingungen ebenfalls in eine Formel gebracht. Wenn eine eindeutige Lösung gesucht ist, muss die Zahl der Nebenbedingungen immer um eins geringer sein als die Zahl der Variablen in der Hauptbedingung.

- <u>Zielfunktion</u>:
  Werden jetzt alle Nebenbedingung in die Hauptbedingung eingesetzt und dadurch nahezu alle Variablen ersetzt, so erhält man die Zielfunktion.

EXTREMWERTPROBLEME II

Beispiel:

Die Firma Koka-Coola möchte eine Dose auf den Markt bringen, die ein Fassungsvermögen von einem Liter besitzt. Sie werden nun beauftragt eine entsprechende Dose zu konstruieren, bei der der Materialverbrauch minimal ist.

- Hauptbedingung:
  Der Materialverbrauch ist von der Oberfläche der Dose abhängig, d.h. es wird die **Mantelfläche** und **Kreisfläche** benötigt.

  Es gilt: $O(r,h) = M + 2 \cdot A = 2\pi r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$

- Nebenbedingung:
  Da die Oberfläche von den Größen **Radius** und **Höhe** abhängt, benötigen wir eine Rahmenbedingung in Form der Füllmenge.

  Es gilt: $V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1\ dm^3 = 1.000\ cm^3$

EXTREMWERTPROBLEME III

Wenn man nun die Nebenbedingung nach der Variablen Höhe auflöst und in die Hauptbedingung einsetzt, erhält man die Zielfunktion.

- Zielfunktion:

Nebenbedingung: $h = \frac{1.000}{\pi \cdot r^2}$

Nach dem Einsetzen in die Hauptbedingung entsteht die Zielfunktion

$$O(r) = 2\pi r \cdot \left(\frac{1.000}{\pi \cdot r^2}\right) + 2\pi \cdot r^2 = \frac{2.000}{r} + 2\pi \cdot r^2$$

Da es sich nun um eine „normale“ Funktion handelt, kann mittels der Ableitungen der gesuchte Extremwert berechnet werden.

EXTREMWERTPROBLEME IV

Lösung:

$$O(r) = \frac{2.000}{r} + 2\pi \cdot r^2$$

$$O'(r) = -\frac{2.000}{r^2} + 4\pi \cdot r$$

$$O''(r) = \frac{4.000}{r^3} + 4\pi$$ *(ist stets positiv, daher Minimum)*

Berechnung der Extremstelle:

$$O'(r) = 0 \Rightarrow -\frac{2.000}{r^2} + 4\pi \cdot r = 0$$

$$4\pi \cdot r = \frac{2.000}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{2.000}{4\pi} = \frac{500}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$$

Höhe: $h = \frac{1.000}{\pi \cdot r^2} = \frac{1.000}{\pi \cdot 5{,}42^2} \approx 10{,}84$

Oberfläche: $O(r,h) = 2\pi r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$

$$O(r,h) = 2\pi \cdot 5{,}42 \cdot 10{,}84 + 2\pi \cdot 5{,}42^2$$

$$O(r,h) \approx 553{,}73$$

AUFGABEN

1) Ein Bauer möchte auf seinem Acker eine Wiese einzäunen und hat dafür einen Maschendrahtzaun von 200m zur Verfügung.

   Welche Maße hat das Grundstück, wenn er eine maximale Fläche haben möchte?

2) Eine Firma für Waffeleis möchte eine neue Eistüte produzieren.
   Die Form der Tüte entspricht die einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
   In diese neue Waffel müssen 250 ml Eis passen.

   Bei welchen Maßen Materialverbrauch minimal?

FUNKTIONSGLEICHUNGEN I

In einem weiteren Anwendungsgebiet der Analysis erzeugt man aufgrund von existierenden Punkten bzw. eines Funktionsgraphen die dazugehörige Gleichung.

Dazu werden im ersten Schritt alle benötigten Gleichungen aufgestellt.
Die Summe der existierende Koeffizient beschreibt alle benötigten Gleichungen.

<u>Beispiel:</u>
Erstellen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3, die im Punkt $(2/0)$ einen Sattelpunkt hat und bei 12 durch die y-Achse geht.

Die allgemeinen Gleichungen lauten:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

FUNKTIONSGLEICHUNGEN II

Die Angaben der Aufgabenstellung liefern die folgenden 4 Bedingungen:

Sattelpunkt $(2/0)$:	$f(2) = 0$:	$8a + 4b + 2c + d = 0$
	$f'(2) = 0$:	$12a + 4b + c = 0$
	$f''(2) = 0$:	$12a + 2b = 0$
Achsenschnittpunkt $(0/12)$:	$f(0) = 12$	$d = 12$

Durch das Lösen des obigen Gleichungssystems erhält man:

$$a = -\frac{3}{2}; b = 9; c = -18; d = 12$$

Die gesuchte Gleichung lautet somit:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 9x^2 - 18x + 12$$

AUFGABEN

1) Gesucht ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 3, die an den Stellen 2 und 3 durch die x-Achse geht und bei $(1/4)$ einen Hochpunkt besitzt.

2) Bestimmen Sie anhand des gegebenen Graphen die zugehörige Funktion