MATHEMATIK

28.01.2019

VOKABELN VOM 24.01.2019

Symmetrieverhalten
Einheitskreis
rechtwinkliges Dreieck
Sinus
Cosinus
Additionstheoreme
Amplitude
Periode
Phasenverschiebung

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was können Sie via Anzahl an Variablen und Gleichungen folgern?
- ✓ Wann nutzen Sie die Additionstheoreme?
- ✓ Was bedeutet die Phasenverschiebung?
- ✓ Wie können Sie den Wertebereich einer Funktion verschieben?
- ✓ Wie verändern Sie die Periode?
- ✓ Wie zeigen Sie, dass diese Periode gilt?
- ✓ Was bewirkt die Potenz einer trigonometrischen Funktion?
- ✓ Welche Symmetrien existieren bei einer Funktion?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wiederholungsaufgaben zur Trigonometrie.
- ✓ Aus welchen Bestandteilen besteht die Kurvendiskussion?
- ✓ Welche Ergebnisse liefern uns Funktion bzw. deren Ableitung?
- ✓ Welche Symmetrien gibt es?
- ✓ Wie bildet man die Ableitung eines Potenzausdrucks?
- ✓ Was geschieht bei einem Produkt aus zwei Funktionen?
- ✓ Was ändert sich wenn ein Bruch vorhanden ist?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen auf ihr Symmetrieverhalten .

a) $$f(x) = \frac{5 - x^4}{x^2} + 3$$

b) $$h(x) = 3 \cdot [\sin(\,2x - \pi) + 2]$$

2) Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen hinsichtlich des Wertebereichs, der Periode als auch des Symmetrieverhaltens und beweisen diese Eigenschaften. (Skizze)

$$k(x) = 5 + \frac{2}{3} \cdot \cos^4(\frac{1}{2} \cdot (\pi - x))$$

KURVENDISKUSSION

Ist eine gegebene Funktion auf deren Definitionsbereich **stetig** als auch **differenzierbar**, kann u.a. mittels der Ableitungen deren Verlauf näher beschrieben werden.

Die folgenden **Zusammenhänge** sind bzgl. Funktion und Ableitung gültig:

✓Ausgangsfunktion:	y-Koordinate	(siehe Achsenschnittpunkte)
✓1. Ableitung:	Steigung	(Extremstellen)
✓2. Ableitung:	Krümmung	(Wendestellen)

Eine **Kurvendiskussion** besteht daher im Wesentlichen aus den folgenden Schritten:

1. Definitions- und Wertebereich
2. Grenzwertbestimmung
3. Symmetrieverhalten (Achsen-/ Punktsymmetrie)
4. Achsenschnittpunkte (x-/ y-Achse)
5. Extremstellen (Hoch-/ Tiefpunkte)
6. Wendestellen
7. Funktionsgraph

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente der gegebenen Funktion, in dem Sie ausschließlich die allgemeine Definition einer Geradengleichung und den Differenzenquotienten verwenden.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 20$$

ABLEITUNGEN

Handelt es sich um ein **ganzrationales** Polynom, eine „einfache“ **n-te Wurzel** oder ein einfaches x hoch n im **Nenner**, so werden die Ableitungen mittels folgendem Gesetz gebildet:

$$\boxed{f(x) = \alpha \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot n \cdot x^{n-1}}$$

Im ersten Schritt muss der Ausdruck in einen reinen Potenzausdruck umgewandelt werden

✓<u>Ganzrationales Polynom</u>:

$$f(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 4$$

$$f'(x) = 12 \cdot x^3 - 4 \cdot x + 12$$

✓<u>N-te Wurzel</u>:

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3 \cdot x^{\frac{3}{4}}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{9}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$$

✓<u>Einfacher Bruch</u>:

$$f(x) = \frac{3}{2 \cdot x^4} = \frac{3}{2} \cdot x^{-4}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot (-4) \cdot x^{-5} = -\frac{6}{x^5}$$

AUFGABEN

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen die 1. und 2. Ableitung.
Prüfen Sie ferner ob eine Achsen- / Punktsymmetrie vorliegt.

1) $f(x) = -2 \cdot x^6 + 0{,}5 \cdot x^2 - 7$

2) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^4}} - \sqrt[5]{x^2}$

3) $f(x) = \frac{5}{x^5} - 2 \cdot \frac{3}{x}$

PRODUKTREGEL

Handelt es sich bei der abzuleitenden Funktion um ein **Produkt**, das aus mindestens zwei **verschiedenen Funktionen** besteht, ist die Produktregel anzuwenden.

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot h(x) \\ f'(x) &= g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \end{aligned}}$$

Es empfiehlt sich die Funktionen des Produkts zuerst **separat** abzuleiten und anschließend die Formel mit den **Zwischenergebnissen** zu füllen.

<u>Beispiel</u>:

$$f(x) = \sin(x) \cdot \sqrt[3]{x^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \sin(x) \\ \\ h(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = \cos(x) \\ \\ h'(x) = \dfrac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} \end{array} \right\} \quad f'(x) = \cos(x) \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sin(x) \cdot \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

QUOTIENTENREGEL

Handelt es sich bei der abzuleitenden Funktion um einen **Qutienten** (Bruch), der aus mindestens zwei **verschiedenen** Funktionen besteht, ist die Qoutientenregel anzuwenden.

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}}$$

Es empfiehlt sich die Funktionen des Nenners bzw. des Zählers zuerst **separat** abzuleiten und anschließend die Formel mit den **Zwischenergebnissen** zu füllen.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^3 - 4x} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \cos(x) \\ \\ h(x) = x^3 - 4x \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = -\sin(x) \\ \\ h'(x) = 3x^2 - 4 \end{array} \right\} \quad f'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot (x^3 - 4x) - \cos(x) \cdot (3x^2 - 4)}{(x^3 - 4x)^2}$$

AUFGABEN

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen die 1. Ableitung und bestimmen jeweils den zugehörigen Definitionsbereich.

1) $f(x) = (x^3 - 5x^4) \cdot 4\cos(x)$

2) $f(x) = 3 \cdot \sin^2(x)$

3) $f(x) = \dfrac{4 \cdot \sqrt[3]{x}}{5x^4}$

4) $f(x) = \dfrac{4 \cdot (x^2 + 3x^3)}{\cos^2(x)}$