MATHEMATIK

24.01.2019

VOKABELN VOM 21.01.2019

Asymptoten
Ersatzfunktion
Achsenschnittpunkte
Stetigkeit
Gauß-Funktion
Signum-Funktion
Differenzierbarkeit
Differenzenquotient
Betragsfunktion
Gesplittete Funktion

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Worauf ist bei der Substitution eines Grenzwertes zu achten?
- ✓ Warum ist eine Sin/Cos-Funktion im Unendlichen divergent?
- ✓ Was bedeutet grafisch gesehen Stetigkeit?
- ✓ Wie wird diese bewiesen?
- ✓ Was versteht man unter der Differenzierbarkeit?
- ✓ Wie kann diese gezeigt werden?
- ✓ Warum ist der Abstand stets positiv?
- ✓ Ab wann liegt eine Folge in einem Epsilonstreifen?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wiederholungsaufgaben zur Stetigkeit / Differenzierbarkeit.
- ✓ Welche Symmetrien gibt es?
- ✓ Welche Symmetrien hat eine trigonometrische Funktion?
- ✓ Wie verändert man die Periode?
- ✓ Was bewirkt die Potenz beim Sinus / Cosinus?
- ✓ Was bewirkt eine Phasenverschiebung?
- ✓ Wie können die Amplituden variiert werden.
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Gegeben seien die folgenden gesplitteten Funktionen.
Berechnen Sie die Parameter *a* und *b*, so dass die Funktion stetig und differenzierbar sind und fertigen Sie eine Skizze der zugehörigen Graphen an.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + b; x < 1 \\ x - a \cdot x^2; x \geq 1 \end{cases}; a, b \in \Re$$

2) Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen auf ihr Symmetrieverhalten .

a) $f(x) = \dfrac{3x}{2x^2 - 4}$

b) $f(x) = \sin(2x) - 3$

SYMMETRIEVERHALTEN

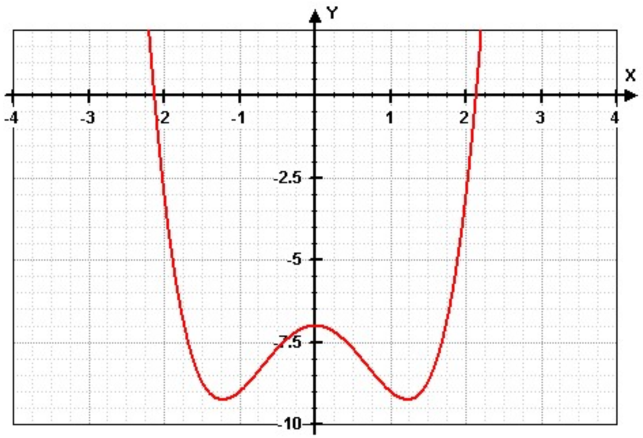
Eine Funktion kann entweder **achsensymmetrisch** zur y-Achse oder **punktsymmetrisch** zum Ursprung sein. Liegt keine der beiden Möglichkeiten vor, existiert auch **keine Symmetrie**.

✓Achsensymmetrie

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 3x^2 - 7 \\ f(-x) &= (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^2 - 7 \end{aligned}\right\} =$$

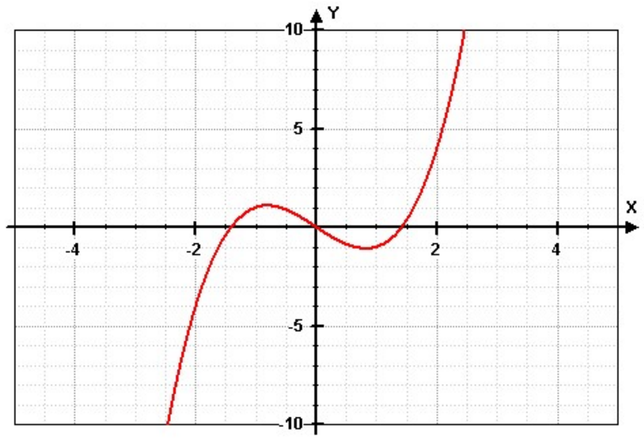


✓Punktsymmetrie

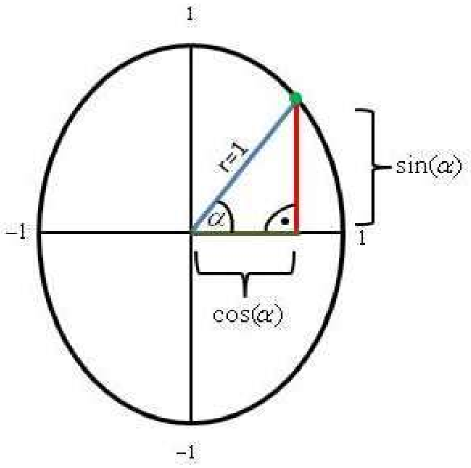
$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

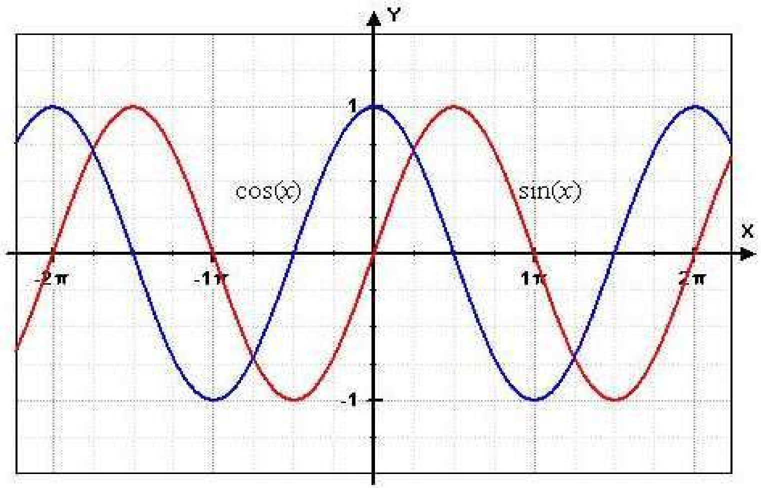
Beispiel

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x \\ -f(-x) &= -((-x)^3 - 2 \cdot (-x)) \end{aligned}\right\} =$$



TRIGONOMETRIE I





Bestimmte Sinus und Cosinuswerte

DEG	0°	30°	45°	60°	90°
RAD	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
SIN	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
COS	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

TRIGONOMETRIE II

Für die Sinus/ Cosinus-Funktion sind im Bereich der **Addition der Argumente** zwei **Additionstheoreme** definiert, wodurch stets bei **rechtwinkliger Konstellation** entweder ein Sinus oder ein Cosinus aus der Funktion **entfernt** werden kann.

1) $\boxed{\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)}$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2x)$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(2x) = \cos(2x)$$

90° Phasenverschiebung
der Sinusfunktion = Cosinusfunktion

2) $\boxed{\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)}$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = \cos(\frac{3}{2}\pi) \cdot \cos(3x) + \sin(\frac{3}{2}\pi) \cdot \sin(3x)$$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = 0 \cdot \cos(3x) + (-1) \cdot \sin(3x) = -\sin(3x)$$

270° Phasenverschiebung
der Cosinusfunktion = -Sinusfunktion

TRIGONOMETRIE III

Eine rein trigonometrische Funktion (**sinus/ cosinus**) stellt eine **Schwingung** innerhalb einer bestimmbaren **Periode** und eines konstanten Wertebereichs dar, die für alle reellen Zahlen definiert ist.

$$\boxed{f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d}$$

Die vier Parameter in der Funktion beziehen sich zum einen auf die **Verschiebung** und zum anderen auf die **Streckung/ Stauchung** in der x-Achsen bzw. y-Achsen-Richtung:

a:	Amplitudenfaktor	Streckung/Stauchung in y-Achsen-Richtung
b:	Periodenfaktor	Streckung/Stauchung in x-Achsen-Richtung
c:	Phasenverschiebung	Verschiebung in x-Achsen-Richtung
d:	Wertebereichverschiebung	Verschiebung in y-Achsen-Richtung

Symmetrie:

- SIN: Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x) \Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$
- COS: Achsensymmetrie $f(x) = f(-x) \Rightarrow \cos(x) = \cos(-x)$

Bei dem Periodenfaktor gilt für die **neue Periode**: $\boxed{P_{NEU} = \frac{P_{ALT}}{b}}$

TRIGONOMETRIE IV

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 3\pi) + 4$

Vereinfachung:

$$f(x) = 3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(3\pi) + \sin(3\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x)\right] + 4$$

$$f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

Wertebereich: $-3 \cdot [-1; 1] + 4 = [-3; 3] + 4 \Longrightarrow W = y \in [1; 7]$

Periode: $P_{NEU} = \frac{2\pi}{{}^{2}/_{3}} = 3\pi \Rightarrow f(x) = f(x + 3\pi)$

$$f(x) = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x + 3\pi)) + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 2\pi) + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x)\right] + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(\frac{2}{3}x)\right] + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

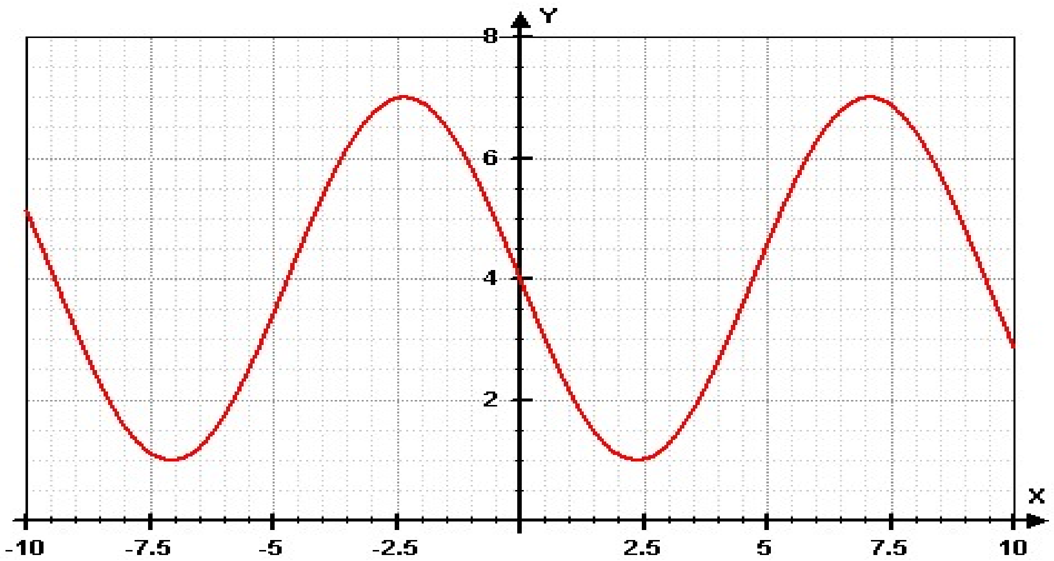
TRIGONOMETRIE V

Beispiel: $f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$

Symmetrie: Punktsymmetrie $f(x) - 4 = -[f(-x) - 4]$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4 - 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) \\ -[f(-x) - 4] = -\left[-3 \cdot \sin(-\frac{2}{3}x) + 4 - 4\right] = 3 \cdot \sin(-\frac{2}{3}x) \end{array}\right\} =$$

Skizze:



TRIGONOMETRIE VI

Anhand der folgenden Vierfeldertafel können die grundlegenden Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion direkt abgelesen werden.

Es wird dabei davon ausgegangen, dass es sich um eine Standardfunktion in der Form $sin^n(g(x))$ oder $cos^n(h(x))$ handelt.

Vierfeldertafel

	$\boldsymbol{n = gerade}$	$\boldsymbol{n = ungerade}$
$\boldsymbol{sin^n(g(x))}$	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = -f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$\boldsymbol{cos^n(h(x))}$	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$

AUFGABEN

Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und fertigen Sie eine Skizze an.

1) $f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(4x - 5\pi)$

2) $g(x) = 2 \cdot \sin^2(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\pi) + 5$

3) $h(x) = 2 - \cos(3x)$

4) $k(x) = 2x^3 - \frac{5}{2x}$