MATHEMATIK

17.01.2019

VOKABELN VOM 14.01.2019

- $\epsilon -$ Umgebung
- Grenzen des Definitionsbereichs
- Annäherung einer Zahl
- Faustregel
- Erweiterung 3. Binom
- Gebrochen-Rationaler Ausdruck
- Regel von L'Hospital
- Dominanzprinzip

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was versteht man unter einem Grenzwert?
- ✓ Wo sollte man den Grenzwert nur berechnen?
- ✓ Was ist ein links- bzw. rechtsseitiger Grenzwert?
- ✓ Was besagt die Faustregel der Grenzwertberechnung?
- ✓ Welche bekannten Grenzwerte kennen Sie?
- ✓ Was passiert bei der Division von 2 Polynomen?
- ✓ Wie funktioniert die Regel von L'Hospital?
- ✓ Wann sollte man mit dem 3. Binom erweitern?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wiederholungsaufgaben zu Grenzwerten.
- ✓ Wie kann man einen Grenzwert interpretieren?
- ✓ Was sind Asymptoten?
- ✓ Wie bestimmt man eine diagonale Asymptote?
- ✓ Wann liegt eine waagerechte Asymptote vor?
- ✓ Was bedeutet eine behebbare Lücke?
- ✓ Grafische Interpretation von Asymptoten / Funktionsverlauf.
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

I. Geben Sie zu den folgenden Aufgaben den Grenzwert an.

1) $$\lim_{x \to (-4)} \frac{2x+8}{\sqrt{8-2x}-(8+x)}$$

2) $$\lim_{x \to 4} \frac{x^3-2x^2-12x+16}{x^2+x-20}$$ Berechnung auf 2 Arten!

3) $$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^x - \frac{3}{\sqrt[x]{9}} + \left(\frac{2 \cdot \sin(x)}{4 \cdot x}\right)^2$$

ASYMPTOTEN I

Eine Asymptote ist ein **Näherungsgraph**, an die sich die untersuchte Funktion unendlich nahe **anschmiegt**, d.h. der Abstand zwischen Funktion und Asymptote ist nahezu Null.
Sie werden dadurch berechnet, in dem man die zugehörigen Grenzwerte an den **Rändern des Definitionsbereich** bestimmt.

Es unterscheiden sich aufgrund der Möglichkeiten bei der Grenzwertbetrachtung folgende Arten:

- ✓ Waagerechte Asymptote:
  Im Unendlichen nähert sich die Funktion einem konstanten Wert an. $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$

- ✓ Senkrechte Asymptote:
  Bei Annäherung an eine Konstante verläuft der Graph im Unendlichen. $\lim_{x\to k} f(x) = \infty$

- ✓ Diagonale Asymptote:
  Im Unendlich nähert sich die Funktion der Unendlichkeit an. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

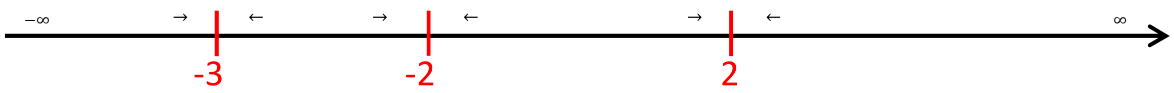
- ✓ Behebbare Lücke:
  Bei Annäherung an eine Konstante nähert sich der Graph einer Konstanten. $\lim_{x\to k} f(x) = k$

ASYMPTOTEN II

<u>Beispiel A</u>: $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 - 10x - 12}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12} \Rightarrow D = R\backslash\{-3; -2; 2\}$

$$f(x) = \frac{2 \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)}{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+3)} \Rightarrow f_e(x) = \frac{2 \cdot (x+1)}{x+2}$$

Ersatzfunktion



$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f_e(2) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^-} f(x) = f_e(-3) = 4$$

$\longrightarrow$ *behebbare Lücke*

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^-} f(x) = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = \infty$$

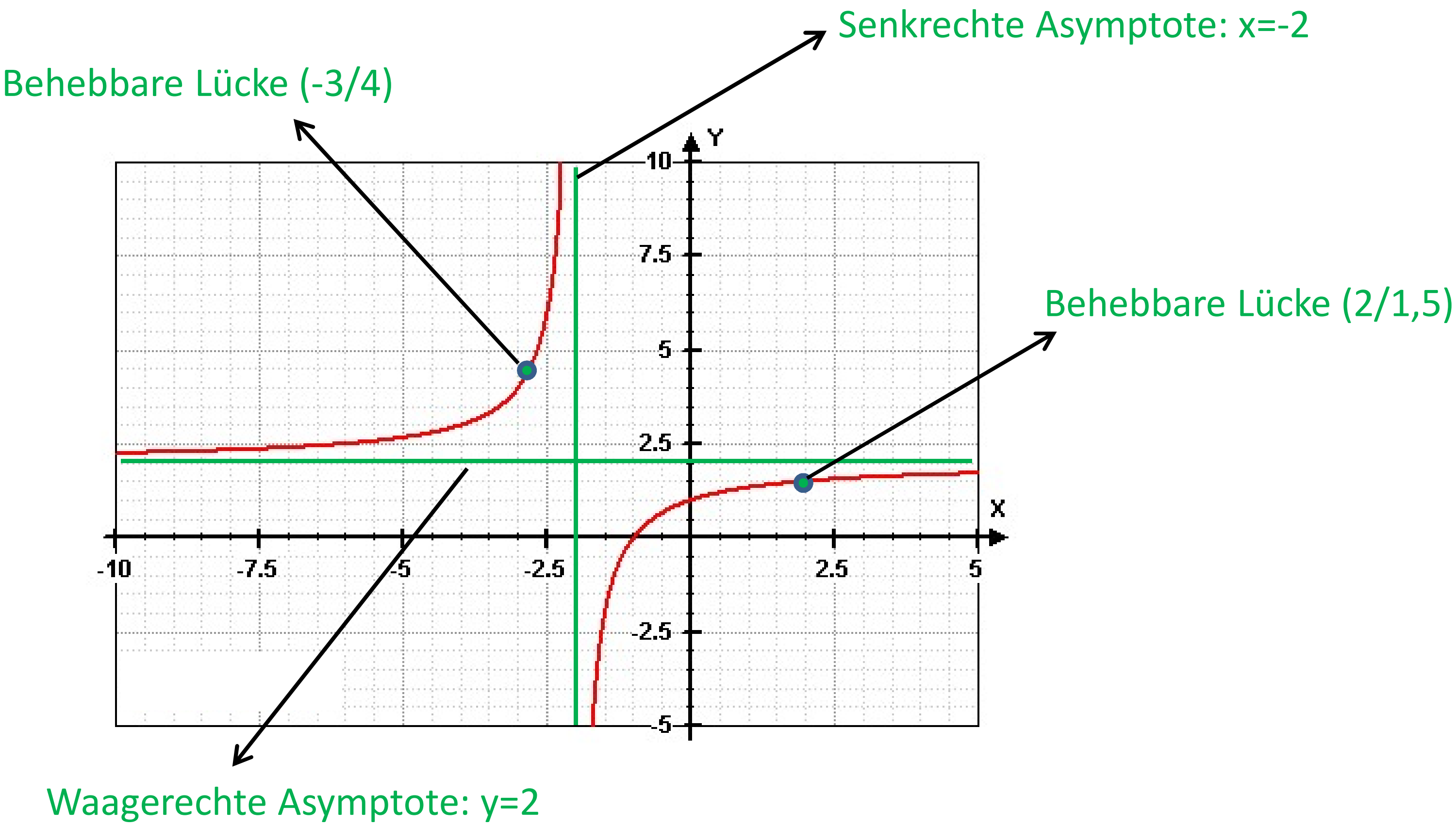
$\longrightarrow$ *senkrechte Asymptote*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 2^+ \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 2^-$$

$\longrightarrow$ *waagerechte Asymptote*

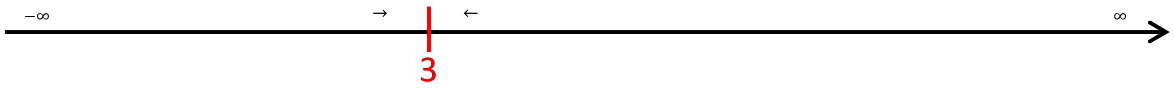
ASYMPTOTEN III

<u>Funktionsgraph zu Beispiel A</u>:



ASYMPTOTEN IV

Beispiel B: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 3} \Rightarrow D = R\backslash\{3\}$



$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \left[\frac{-5}{0^-}\right] = \infty \longrightarrow$ *Senkrechte Asymptote*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}{x \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = [x] = \infty; \lim_{x\to-\infty} f(x)$$
$$= -\infty$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x - 8) \div (x - 3) = x + 1 + \underbrace{\frac{-5}{x - 3}}_{\text{diagonale Asymptote}}$$
$$\frac{-(x^2 - 3x)}{\quad x - 8}$$
$$\frac{-(x - 3)}{-5}$$

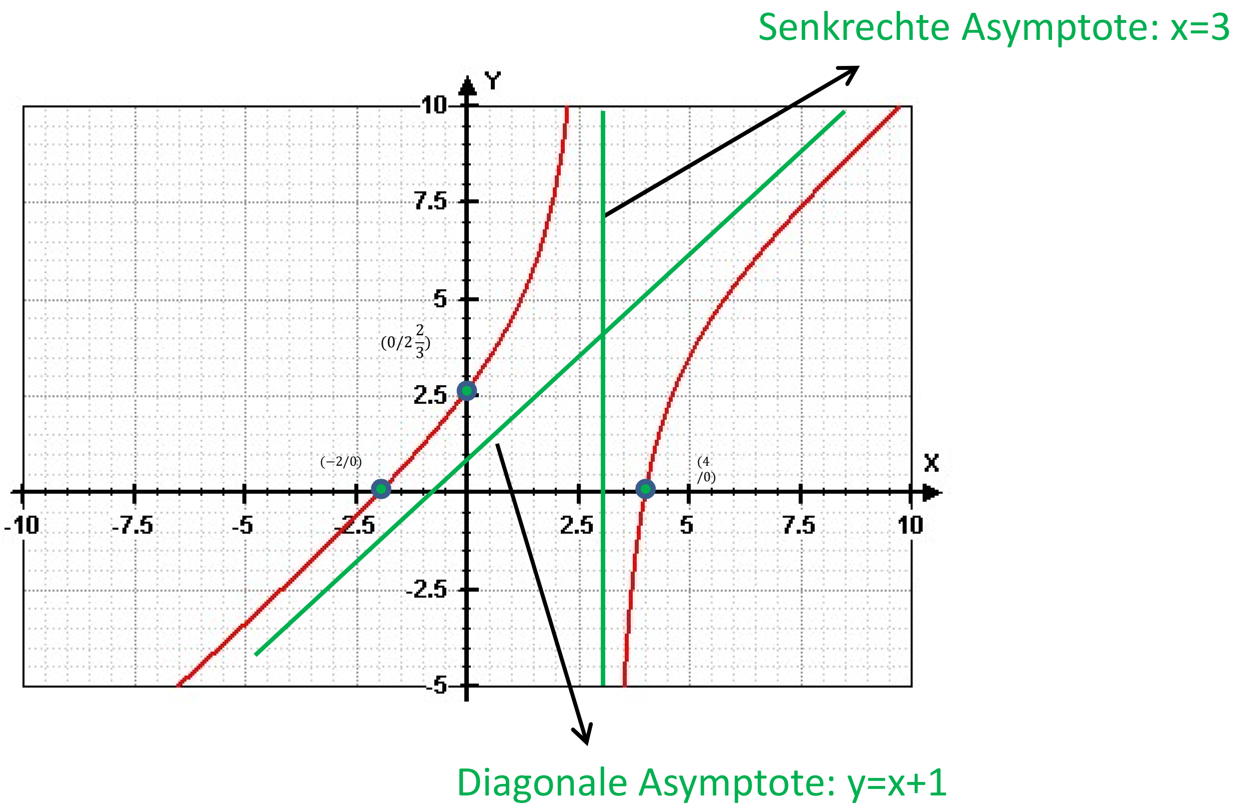
$f(0) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

$f(x) = 0$
0
$= (x - 4) \cdot (x + 2)$
$x_1 = 4 \vee x_2 = -2$

Achsen-Schnittpunkte

ASYMPTOTEN V

<u>Funktionsgraph zu Beispiel B</u>:



AUFGABEN

I. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

1) $$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{2x^3 - 2x^2 - 16x + 24}$$

2) $$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 2x + 40}{x^2 - x - 12}$$

3) $$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 2x - 8}$$