MATHEMATIK

14.01.2019

VOKABELN VOM 20.12.2018

- Konvergenz Reihen
- Vergleichskriterium
- Wurzelsatz
- Quotientenverfahren
- Leibniz-Satz

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie ist der Grenzwert von $\sum q^k$ definiert?
- ✓ Was ist die harmonische Reihe?
- ✓ Wie groß ist der Grenzwert der geometrischen Reihe?
- ✓ Was macht man beim Vergleichskriterium?
- ✓ Wann sollte man den Wurzelsatz verwenden?
- ✓ Was macht man bei Fakultäten?
- ✓ Wann spricht man von einem echten Alternierungswert?
- ✓ Wie funktioniert der Satz von Leibniz?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was versteht man unter einem Grenzwert?
- ✓ Welche Rolle spielt die Epsilon-Umgebung?
- ✓ Welche Möglichkeiten der Annäherung gibt es?
- ✓ Welche bekannte Zusammenhänge existieren?
- ✓ Was ist die Faustregel der Grenzwertbestimmung?
- ✓ Wie erfolgt die Erweiterung mittels 3. Binom?
- ✓ Was versteht man unter der Regel von L'Hospital?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

GRENZWERTE I

Wird der Grenzwert (**LIMES**) einer Funktion an eine **definierte Zahl** angenähert und ist das entstehende **Ergebnis** innerhalb einer **kleinstmöglichen Umgebung** konstant, so existiert der Grenzwert und die Funktion **konvergiert** (Gegenteil: divergiert).

Es wird unterschieden, ob man sich der **Unendlichkeit** oder einer **Konstanten** annähert:

- ✓ Unendlichkeit: $\lim_{x \to \infty} (42 + e^{-x}) = [42 + 0] = 42$
- ✓ Konstant: $\lim_{x \to 2} (\ln(x - 2)) = -\infty$

$$\lim_{x \to n} f\,(x) = \alpha$$

Annäherung *Funktion* *Grenzwert*

Je nachdem **von wo** man sich einer Konstanten nähert wird dies durch ein **+/- im Exponenten** der Annäherungszahl dargestellt (*Ladung von Ionen*), gleiches gilt für den erreichten Grenzwert.

- ✓ Vom Positiven (rechts): $\lim_{x \to n^+} f\,(x) = \alpha^-$ $\longrightarrow$ *Der Grenzwert wird von **unten** angesteuert*
- ✓ Vom Negativen (links): $\lim_{x \to n^-} f\,(x) = \alpha^+$ $\longrightarrow$ *Der Grenzwert wird von **oben** angesteuert*

GRENZWERTMETHODIK I

Da es verschiedene Möglichkeiten der Grenzwertbestimmung gibt, ist es wichtig die einfachste (effizienteste) Regel zur Lösung der Aufgabe anzuwenden.

Die im Folgenden beschriebenen Schritte haben sich bewährt:

1. Bekannte Zusammenhänge:

   Ist ein spezieller bzw. bekannter Grenzwert vorhanden?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0 \vee \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1 \vee \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha \vee \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \vee \lim_{x\to\infty} q^x=0; |q|<1$$

2. Faustregel:

   Trifft Unendlichkeit / Null auf eine Konstante?

$$\lim_{x\to\infty}(Ausdruck)=\left[\frac{k}{\infty}\right]=0 \longrightarrow$$ *Konstant durch unendlich ist Null*

$$\lim_{x\to 0}(Ausdruck)=\left[\frac{k}{0}\right]=\infty \longrightarrow$$ *Konstant durch Null ist unendlich*

GRENZWERTMETHODIK II

3. <u>Gebrochen-Rationaler Ausdruck</u>: *Polynom vom Grade m / Polynom vom Grade n*

$x \to \infty$

a) Grad (Zähler/m) > Grad (Nenner/n): $\Rightarrow$ *Grenzwert ist* ***unendlich***

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 - 3x + 5}{5 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 \cdot \left(2 - \frac{3}{x^3} + \frac{5}{x^4}\right)}{x^2 \cdot \left(\frac{5}{x^2} - 1\right)} = \left[\frac{2x^2}{-1}\right] = -\infty$$

b) Grad (Zähler/m) < Grad (Nenner/n): $\Rightarrow$ *Grenzwert ist* ***Null***

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - 25}{x^3 - 4x + 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \left(2 - \frac{25}{x}\right)}{x^3 \cdot \left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)} = \left[\frac{2}{x^2}\right] = 0$$

c) Grad (Zähler/m) = Grad (Nenner/n): $\Rightarrow$ *Grenzwert ist* ***konstant***

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 7x + 5}{4 - x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \left(2 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(\frac{4}{x^2} - 1 + \frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{2}{-1}\right] = -2$$

Ausklammern des größten Potenzausdrucks

Entstehende Nullfolgen fallen weg!

GRENZWERTMETHODIK III

3. Gebrochen-Rationaler Ausdruck: *Polynom vom Grade m / Polynom vom Grade n*

$x \to k$

d) unabhängig vom Grad des Zählers / Nenners:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-6x-8}{x^2+x-6} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+1)\cdot(x+4)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x+3)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+1)\cdot(x+4)}{(x+3)} = \left[\frac{3\cdot 6}{5}\right] = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

Sollte nicht $\left[\frac{0}{0}\right]$ *als erstes Zwischenergebnis heraus kommen,*

greift die Fausregelformel unter Punkt 2).

Faktorisierung des Polynoms

$\Downarrow$

Kürzen des Linearfaktors

GRENZWERTMETHODIK IV

4. Erweiterung: *Mittels 3.Binom erfolgt die Vereinfachung*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{2\cdot\sqrt{6-x}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{2\cdot\sqrt{6-x}-4}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{6-x}+4}{2\cdot\sqrt{6-x}+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(2\cdot\sqrt{6-x}+4)}{4\cdot(6-x)-16}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot 2\cdot\sqrt{6-x}+4}{-4\cdot\cancel{(x-2)}}=\left[\frac{8}{-4}\right]=-2$$

5. Substitution: *Ersetzung, um auf einen bekannten Ausdruck zu kommen*

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\\ &\lim_{\gamma\to 0}\frac{\sin(\gamma)}{\gamma}=1\end{aligned}\right\}$$

Substitution: $\gamma=\frac{1}{x}: x\to\infty\Leftrightarrow\gamma\to 0$

GRENZWERTMETHODIK V

6. Regel von L‘Hospital: *Bei 0/0 geht man ins Krankenhaus*

$$\boxed{\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to k} \frac{[\sin(x)]'}{[x]'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \left[\frac{1}{1}\right] = 1$$

7. Dominanzprinzip: *Undendlich trifft auf Null: Der Stärkere gewinnt*

Mittels 1. Ableitung wird die Steigung ermittelt und aufgrund derer Klassifizierung die dominanten Funktion / Ausdruck bestimmt.

$\infty \cdot 0$

$$0\colon \lim_{x \to \infty} \left(x^2 \cdot \frac{1}{e^x} \right) = 0$$

$$k\colon \lim_{x \to \infty} \left(e^{x+2} \cdot \frac{1}{e^x} \right) = e^2$$

$$\infty\colon \lim_{x \to \infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x^2} \right) = \infty$$

exponentiell Funktion

ist stärker als

Potenzfunktion

AUFGABEN

I. Geben Sie zu den folgenden Aufgaben den Grenzwert an.

1) $$\lim_{x\to(2)} \frac{21x-42}{\sqrt{0{,}5x}-\sqrt{3-x}}$$

2) $$\lim_{x\to(-\infty)} \frac{7x^3+2x^2-x^4}{3x^4+1}$$

3) $$\lim_{x\to(-\infty)} \frac{3\cdot e^x}{x^2}$$

4) $$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{4}{x}\right)^x - \sqrt[x]{5}$$

5) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2+2x-8}$$

6) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{2+\frac{3}{x}}$$