17.12.2018


Mengenlehre
Aussagenlogik
Relationen
Funktionen
Zahlentheorie
Vollständige Induktion
Zahlenfolgen
Reihen

MENGENLEHRE

- ✓ <u>Definition einer Menge:</u> $\{Objekt \in Menge | mathematische\ (verbale)\ Bedingung\}$

- ✓ <u>Beziehungsjunktoren</u>:
  ∈ → *ist **Element**, d.h. Wert und Format stimmen überein*
  ⊂ → *ist **Teilmenge** (reflexiv, transitiv und antisymmetrisch)*

- ✓ <u>Operatoren</u>:
  \ → ***Negation**: Es wird das Gegenteil (Komplement) gesucht*
  ∩ → ***UND** (Schnittmenge): Die Lösung muss gleichzeitig vorkommen*
  ∪ → ***ODER** (Vereinigungsmenge): Alle Objekte werden zusammen geführt.*
  ***Gesetze** (Kommutativ, Assioziativ, Distributiv, de Morgan, Absorption, Idempotenz)*

- ✓ <u>Anwendung der Mengenlehre:</u>
  ⟶ ***Klasseneinteilung** / Zerlegung (disjunkte Mengen)*
  ⟶ ***Potenzmengen** (Menge aller Teilmengen)*
  ⟶ ***kartesische Produkt** (nicht kommutativ)*

AUSSAGENLOGIK

- ✓ Definition einer Aussage (-form):

- ✓ Operatoren:
  ¬ *Negation: aus wahr wird falsch und umgekehrt*
  ∧ *Konjunktion: nur die Kombination aus wahr UND wahr wird wahr*
  ∨ *Disjunktion: nur die Kombination aus falsch UND falsch wird falsch*
  ⟶ *Subjunktion: nur die Kombination aus wahr PFEIL falsch wird falsch*
  ⟷ *Bijunktion: Beide Belegungen müssen identisch sein*
  ***Gesetze** (siehe Mengenlehre, Tertium non datur)*

- ✓ Wahrheitstabellen erstellen und anwenden:
  ⟶ **Formalisierung** von Problemstellungen / Aussagen
  ⟶ **Schaltungen** erstellen und die Erfüllungsmenge bestimmen
  ⟶ **kanonische KNF/ DNF**: nutzen des MIN- und MAX-Terms ⟶ *Vereinfachung*

- ✓ Formelklassen ⟶ (***Tautologie, Kontingenz, Kontradiktion***)

- ✓ Folgerung (***Implikation***) und Gleichheit (***Äquivalenz***)

RELATIONEN

- ✓ <u>Definition einer Relation:</u> $\{Tupel\ \in kartesischen\ Produkt | mathematische\ (verbale)\ Bedingung\}$

- ✓ <u>Eigenschaften einer Relation:</u>
  reflexiv*: jeder Pasch gehört dazu*

  transitiv*: logische Schlussfolgerungen sind zugelassen*

  symmetrisch*:* *jedes Tupel lässt sich drehen*
  → ***Äquivalenzrelation (Klassenbildung)***

  antisymmetrisch*: kein Tupel lässt sich drehen, bis auf den Pasch*
  → ***Ordnungsrelation***

FUNKTION

- <u>Definition einer Funktion als rechtseindeutige Relation:</u>
  $f(x) = Term(x) = y$ *mit*
  Definitionsbereich: $\mathbb{D} = Domain$ (LOG, Wurzel, Bruch)
  Wertebereich: $\mathbb{W} = Range$

- <u>Eigenschaften einer Funktion:</u>
  injektiv: *linkseindeutig* → *Parallele zur x-Achse darf nur einmal schneiden*
  surjektiv : *rechtstotal* → *Der Wertebereich wird komplett abgebildet*
  total *linksstotal* → *Der Definitionsbereich wird komplett abgebildet*

- <u>Umkehrfunktion:</u>
  bijektiv: *Durch Anpassung der Welt die Funktion passend machen*

  Bildung: <u>*arithmetisch*</u>:
  → *Auflösen nach* x *anschließend* ***Variablentausch*** → $f^{-1}(x)$
  <u>*grafisch*</u>:
  → ***Spiegelung*** *an der ersten Winkelhalbierenden*

ZAHLENFOLGEN

- ✓ Definition einer Zahlenfolge:
  explizit: *Das Folgeglied wird direkt mittels der Variablen bestimmt*
  implizit: *Das Folgeglied wird aufzählend beschrieben*
  rekursiv: *Das Folgelied ist von mindestens einem Vorgänger abhängig*

- ✓ Anwendung der vollständigen Induktion:
  Teilbarkeit *von Folgen:* → *Bestätigung durch Zahlenmengen*
  Ungleichungen *von Folgen:* → *Ziel ist eine allgemeingültige Aussage*
  Konvergenz *von Folgen:* → *Monotonie und Beschränktheit*

- ✓ ***Grenzwert*** *von Folgen* → ***Substitution*** *(rekursive Folgen)*

REIHEN

- <u>Definition einer Reihe als Summe/ Produkt einer Folge:</u>
  Beweis der Summen- / Produktformel ⟶ $\boldsymbol{S_n + a_{n+1} = S_{n+1}}$ / $\boldsymbol{P_n \cdot a_{n+1} = P_{n+1}}$

- <u>Werte einer Reihe:</u>
  ⟶ ***Partialsumme****: Wert einer Reihe bis zu einem konstanten Endwert*
  ⟶ ***Grenzwert****: Wert einer Reihe bis zur Unendlichkeit als Endwert*
  ⟶ *Anpassung des Startwerts*
  durch Verschiebung der Grenzen, Abziehen fehlender Elemente, Subtraktion der Partialsumme

- <u>Spezielle Reihen und deren Grenzwerte (Vorsicht auf Startwert)</u>
  ⟶ ***geometrische, harmonische*** *Reihen*
  ⟶ *Reihen für* ***Sinus, Cosinus*** *und* $\boldsymbol{e^x}$

- <u>Konvergenz von Reihen:</u>

⟶ ***Vergleichskriterium****:*	*Kleiner-Vergleich mit einer konvergenten Reihe*
⟶ ***Wurzelsatz****:*	*Viele Variablen im Exponenten und/ oder Basis*
⟶ ***Quotientensatz****:*	*Wenn Fakultät vorhanden oder nichts Besseres geht*
⟶ ***Leibnitzsatz****:*	*Ist ein echter Alternierungswert vorhanden,* *muss der Rest nur noch Nullfolge sein.*

GESCHENKE I

1) Veranschaulichen Sie die Gleichung $(A \cap B) \cup C = (B \cup C) \setminus \mathrm{A}$ durch ein Vennsches Diagramm.
   Warum ist $B = \{\quad\} \wedge (A \cap C) = \{\quad\}$ nicht zwingend eine Voraussetzung für die Lösung der Gleichung. Nennen Sie ein Gegenbeispiel.

2) Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage eine Kontradiktion darstellt und begründen Sie Ihre Antwort.

$$\neg y \wedge \Big((x \longrightarrow z) \wedge \big((x \wedge \neg z) \vee y\big)\Big)$$

3) Bilden Sie die disjunktive und kanonische konjunktive Normalform der Gleichung

$$\big((p \vee s) \longrightarrow (t \wedge q)\big) \vee (\neg q \wedge r)$$

GESCHENKE II

4) Welche Eigenschaften besitzt die Relation $\chi = \left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ | y = 2 \cdot \frac{x}{\alpha}; \alpha \in \mathbb{Q}\right\}$?
Geben Sie für $\propto = 0{,}1$ fünf mögliche Tupel der Relation an.

5) Gegeben ist die Relation $\nabla = \left\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | b = e^{(a^2)}\right\}$.

Begründen Sie, dass es sich um eine Funktion handelt und geben deren Eigenschaften an. Wie müssen die Mengen des kartesischen Produkts definiert sein, damit die Funktion bijektiv ist?

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion .

6) Berechnen Sie von $f(x) = \sqrt{27 - 3x^2}$ und $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ den Definitions- und Wertebereich und prüfen das Symmetrieverhalten der Funktionen.

GESCHENKE III

7) Zeigen Sie, dass der Ausdruck $(\beta^n - 1)$ für alle $n;\ \beta \in \mathbb{N}$ durch $(\beta - 1)$ teilbar ist

8) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage gültig ist.

$$3^{2n} + 7; n \geq 0 \ ist\ durch\ 8\ teilbar$$

9) Beweisen Sie, dass die Bernoulli-Ungleichung $1 + n \cdot a \leq (1 + a)^n; n \in \mathbb{N}$ gültig ist.

10) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\sum (k-1) \cdot ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = n \cdot ln(n) - ln(n!)$ gültig ist

GESCHENKE IV

11) Bestimmen Sie mittels Differenz- und Quotientenmethode die Monotonie der gegebene Folgen.

a) $a_n = 4 - \frac{3}{n};\ n \geq 1$

b) $a_n = 3 + \left(\frac{2}{5}\right)^n;\ n \geq 0$

12) Untersuchen Sie die gegebenen rekursiven Folgen hinsichtlich ihrer Konvergenz (Monotonie und Beschränktheit) und bestimmen, sofern möglich den dazugehörigen Grenzwert.

a) $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 2;\ a_1 = 2{,}25$

b) $a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot a_n + 10);\ a_1 = 20$

GESCHENKE V

13) Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung für die folgende Produktreihe richtig ist.

$$\prod\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}, k>1$$

14) Beweisen Sie, dass die Gleichung für alle $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ gültig ist.

$$\sum(3k-2)=\frac{(1+n)\cdot(3n-4)}{2}$$

GESCHENKE VI

15) Bestimmen Sie den Wert der gegebene Reihen.

a) $$\sum_{k=3}^{9}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left(\frac{2}{3k}\right)^2\right)$$

b) $$\sum_{k=5}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4^{2k}}{k!}$$

16) Untersuchen Sie bei der Reihe die Konvergenz und bestimmen deren Grenzwert.

a) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{3\cdot 9^k}{(2k+1)!}$$

b) $$\sum_{k=3}^{\infty}\left[\frac{2^{2k+1}}{3\cdot k!}\right]$$

GESCHENKE VI

17) Bestimmen Sie den Wert der gegebene Reihen.

a) $$\sum_{k=3}^{9}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left(\frac{2}{3k}\right)^2\right)$$

b) $$\sum_{k=5}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4^{2k}}{k!}$$

18) Untersuchen Sie bei der Reihe die Konvergenz und bestimmen deren Grenzwert.

a) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{3\cdot 9^k}{(2k+1)!}$$

b) $$\sum_{k=3}^{\infty}\left[\frac{2^{2k+1}}{3\cdot k!}\right]$$