

MATHEMATIK

10.12.2018

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie bestimmt man den Wert einer Reihe?
- ✓ Was ist die Grundvoraussetzung, damit eine Reihe konvergiert?
- ✓ Wie ist die geometrische Reihe definiert?
- ✓ Wann wäre sie divergent?
- ✓ Was ist die Partialsumme?
- ✓ Für was steht das n in der zugehörigen Formel?
- ✓ Wie macht man den Startwert passend?
- ✓ Wie kann man daraus den Grenzwert herleiten?

REIHEN – GRENZWERTE I

Wenn der **Grenzwert** einer Reihe berechnet werden soll, kann dies nur dann geschehen, wenn die zugehörige Folge als Grenzwert Null hat (**Nullfolge**), da somit im Unendlichen der **Reihenwert** durch die Addition von Null **nicht mehr verändert** werden kann.

Grenzwert:
$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n}_{\text{Geometrische Reihe}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}; |q| < 1, \text{ da } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

↓
Grenzwert

Beispiel:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2, \text{ da } \left|\frac{1}{2}\right| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \Rightarrow \text{divergent, da } \left|\frac{3}{2}\right| \geq 1$$

REIHEN – GRENZWERTE II

Ist der **Startwert** eines Reihengrenzwertes **ungleich Null**, so existieren die gleichen 3 Möglichkeiten wie bei der Partialsumme den Grenzwert der Reihe zu bestimmen:

1) Differenzen von Partialsummen:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-0,5} - \frac{1-0,5^3}{1-0,5} = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

2) Subtraktion der fehlenden Elemente:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) = 2 - 1\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

3) Verschiebung der Grenzen

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+3} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-0,5} = \frac{1}{4}$$

REIHEN – GRENZWERTE III

Ähnlich wie bei den speziellen Grenzwerten von Funktionen, gibt es auch im Bereich der Reihen besondere Formen mit **definierten Grenzwerten**.

1) Geometrische Reihe:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2) Harmonische Reihe:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \Rightarrow \textit{divergent}$$

3) Spezielle Reihen:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots \pm \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots \pm \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den gegebenen Reihen die Partialsumme bzw. den zugehörigen Grenzwert.

$$1) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$$

$$2) \sum_{k=2}^5 \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k}\right)^2 - \sum_{k=0}^3 5^k$$

$$4) 4 \cdot \sum_{k=3}^8 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$5) \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}$$

$$6) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{3 \cdot x^{2k}}{(2k)!}$$

REIHEN – KONVERGENZ I

Eine Summenreihe ist dann **konvergent**, wenn sie entweder einem **bestimmten Grenzwert** besitzt oder wenn die Existenz eines Grenzwertes mittels der **Konvergenzkriterien** bewiesen wurde.

1) Vergleichskriterium: $a_k \leq b_k \rightarrow$ Ist a_k konvergent, dann ist auch b_k konvergent

$$\sum \frac{1}{k^3} \rightarrow \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2} \quad (\text{geometrische Reihe}) \quad \Rightarrow \text{konvergent}$$

2) Wurzelsatz: $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$

$$\sum \frac{k}{2^k} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \text{konvergent}$$

3) Quotientensatz: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$

$$\sum \frac{2^k}{k!} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot 2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1 \quad \Rightarrow \text{konvergent}$$

4) Leibniz-Satz: $\sum (-1)^k \cdot b_k \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$

$$\sum (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \right) = 0 \quad \Rightarrow \text{konvergent}$$

REIHEN – KONVERGENZ II

Um die Konvergenz einer Reihe zu beweisen, empfiehlt sich die folgende Vorgehensmethodik:

1) Schritt (Nullfolge):

Ist die Folge a_k konvergent und handelt es sich um eine Nullfolge?

Bei **JA** gehe zu Schritt 2

Bei **NEIN** ist die Reihe divergent, obwohl die Folge konvergieren könnte.

2) Schritt (Reihe):

Handelt es sich um eine **geometrische Reihe** der Form $\sum q^k$?

→ $|q| < 1 \Rightarrow$ konvergent, da $\lim_{k \rightarrow \infty} |q|^k = 0$ gilt.

→ $|q| \geq 1 \Rightarrow$ divergent, da $\lim_{k \rightarrow \infty} |q|^k \geq 1$ gilt.

Ist die Reihe $\sum \frac{1}{k^\beta}$?

Vergleichskriterium

→ $\beta > 2 \Rightarrow$ konvergent, Vergleich mit $\frac{1}{k^2}$ (geometrische Reihe)

→ $\beta < 2 \Rightarrow$ divergent, durch Widerspruch mit $\frac{1}{k}$ (harmonische Reihe)

REIHEN – KONVERGENZ III

2) Schritt (Reihe):

Sind viele Variable im **Exponenten** und/oder in der **Basis**?

Wurzelsatz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\beta^k} = \beta \vee \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\beta \cdot k} = 1$$

Sind **Fakultäten** in der Folge enthalten?

Quotientensatz

Setze $(k+1)$ in die Folge a_k ein und schreibe auf den gleichen Bruchstrich den Kehrwert von $a_k \Rightarrow$ Kürzen der Fakultäten.

Ist ein **Alternierungswert** $(-1)^{k+1}$ vorhanden?

Leibnizsatz

Streiche den alternierungswert und bilde von dem Rest den Grenzwert gegen unendlich. Das Ergebnis muss eine Nullfolge sein.

REIHEN – KONVERGENZ IV

3) Schritt (Grenzwert):

Nutze bekannte Zusammenhänge wie z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Nutze die Summenformel der geometrischen Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Ist der **Startwert** falsch?

Verschiebe / erhöhe die Variable um die „Verfälschung“ $(k + \beta)$

Subtrahiere die ersten β Elemente der Reihe von dem Grenzwert.

AUFGABEN

1) Prüfen Sie bei den folgenden Reihen deren Konvergenzverhalten.

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2 + 1} + \frac{2}{k!}$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{4k + 1}}$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{-k+1} \cdot k^2}{3k - 2}$$