MATHEMATIK

06.12.2018

VOKABELN VOM 03.12.2018

- Reihe
- Folgenglied
- Startwert
- Endwert
- Summenformel
- Induktionsschluss

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann spricht man von einer Reihe?
- ✓ Warum spielt die Folge bei einer Reihe eine große Rolle?
- ✓ Was versteht man unter Position, Ausprägung und Reihenwert?
- ✓ Wie kann man die mögliche Summenformel erhalten?
- ✓ Was passiert in der ersten Induktionsschritt?
- ✓ Woran erkennt man an welcher Stelle zu starten ist?
- ✓ Wie heißt die Formel des Induktionsschluss?
- ✓ Warum gilt diese Formel?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben zur vollständigen Induktion bei Reihen
- ✓ Was versteht man unter einer Partialsumme?
- ✓ Wie bestimmt man den Grenzwert einer Reihe?
- ✓ Was ist eine geometrische Reihe?
- ✓ Warum ist die harmonische Reihe divergent?
- ✓ Welche Konvergenzkriterien gibt es?
- ✓ Welche Standardmethodik kann man nutzen?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Zeigen Sie mittels dem Verfahren der vollständigen Induktion, dass die folgenden Aussagen bzw. Zusammenhänge gültig sind:

a) $$\sum_{k=0}^{n} 5^k = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$$

REIHEN – PARTIALSUMME I

Um den Wert einer Reihe (Definition siehe Seite 49)zu bestimmen kann dies entweder mittels der **Partialsumme** oder über den **Grenzwert** geschehen.
Im Falle der Partialsumme wird der zugehörige **Summenwert** bis zu einem **definierten Element** berechnet, d.h. es wird ein „Parzelle“ aus der Reihe herausgetrennt.

Partialsumme:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 + q + q^2 \ldots + q^n}_{\textit{Geometrische Reihe}} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Partialsumme

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{32}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{32} \cdot \frac{2}{1} = \frac{31}{16}$$

REIHEN – PARTIALSUMME II

Ist der **Startwert** einer Partialsumme **nicht gleich Null**, so existieren 3 Möglichkeiten den Wert der Reihe zu bestimmen:

1) Differenzen von Partialsummen:

$$\sum_{k=3}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-0,5^7}{1-0,5} - \frac{1-0,5^3}{1-0,5} = \frac{127}{64} - \frac{7}{4} = \frac{15}{64}$$

2) Subtraktion der fehlenden Elemente:

$$\sum_{k=3}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1-0,5^7}{1-0,5} - 1\frac{3}{4} = \frac{15}{64}$$

3) Verschiebung der Grenzen

$$\sum_{k=3}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+3} = \frac{1}{8}\cdot\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{8}\cdot\frac{1-0,5^4}{1-0,5} = \frac{15}{64}$$

AUFGABEN

I. Erstellen Sie bei den gegebenen Reihen die Formeln der Partialsumme, in dem Sie alle möglichen Verfahren anwenden.

1) $\sum_{k=3}^{8} \left(\frac{3}{4}\right)^{k}$

2) $\sum_{k=2}^{5} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}$

3) $\sum_{k=4}^{6} 4 \cdot 0{,}5^{k-2}$