

MATHEMATIK

03.12.2018

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie erfolgt der Monotoniebeweis bei rekursiven Folgen?
- ✓ Was muss immer beim Induktionsschluss herauskommen?
- ✓ Wann spricht man von einer optimalen Schranke?
- ✓ Wie beweist man rekursiv eine obere / untere Schranke?
- ✓ Was muss man beim Induktionsschluss zeigen?
- ✓ Wann ist die Schranke falsch?
- ✓ Wie wird der Grenzwert bei einer rekursiven Folge bestimmt?
- ✓ Wie entscheidet man sich für den richtigen Grenzwert?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben zu den behandelten Themengebieten Folgen?
- ✓ Was ist eine Summen- bzw. Produkt-Reihe?
- ✓ Was ist dann eine Summen- / Produktformel?
- ✓ Was ist der Start- / Endwert einer Reihe?
- ✓ Was versteht man unter der Ausprägung einer Position?
- ✓ Welche Rolle spielt die Folge für eine Reihe?
- ✓ Wie zeigt man die Gültigkeit einer Reihendefinition?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

- 1) Bestimmen Sie zu den gegebenen Folgen deren Monotonieverlauf und die zugehörigen Schranken und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion. Begründen Sie ferner die Konvergenz der Folgen und berechnen deren Grenzwert.

a) $a_{n+1} = \sqrt{6 + 5 \cdot a_n}; a_1 = 2$

b) $a_{n+1} = (a_n)^2 + 0,25; a_1 = 0$

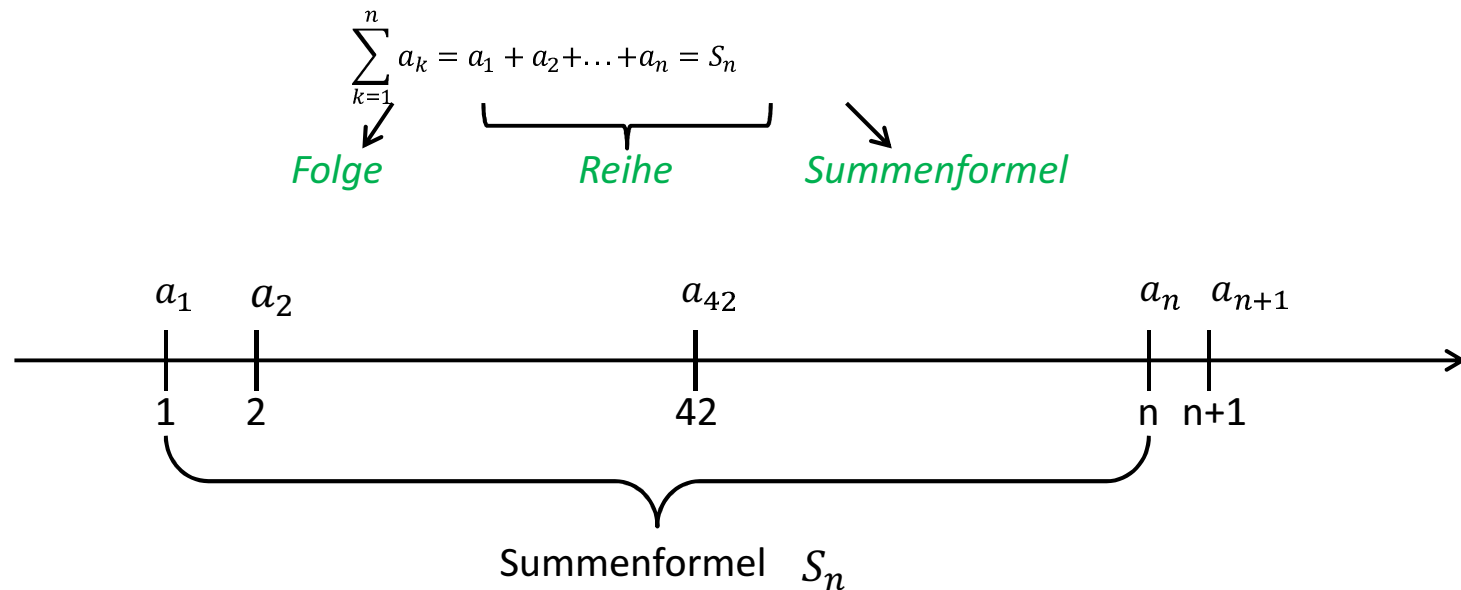
c) $a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot a_n}; a_1 = \sqrt{2}$

d) $a_{n+1} = 2 - \sqrt{2 - a_n}; a_1 = \frac{1}{4}$

REIHEN I

Das Prinzip der vollständigen Induktion bei einer **Reihe** basiert ebenfalls auf den **Induktionsanfang** und den **Induktionschluss**.

Eine Reihe ist stets definiert als die **Summe** bzw. das **Produkt** über einer **Folge**, wobei jeder einzelnen Reihenwert einer **Ausprägung** und einem **Endwert** entspricht.



REIHEN II

Beispiel (Reihe):

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Folge *Reihe* *Summenformel*

Es ist zu zeigen, dass die **Summenformel** für jeden beliebigen **Endwert** n gültig ist. So wird der **Startwert** ($k=1$) der Reihe im Induktionsanfang geprüft, während im **Induktionsschluss** die Reihe bis zur Stelle ($n+1$) läuft.

1. Induktionsanfang:

$$n = 1: \sum_{k=1}^1 k^2 = S_1 \quad \longrightarrow \quad a_1 = S_1$$

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

REIHEN III

Beispiel (Reihe):

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Folge
Reihe
Summenformel

2. Induktionsschluss:

Es wird vorausgesetzt, dass für alle $n > 0$ der obige Zusammenhang gültig ist.

$$n = n + 1: \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = S_{n+1} \quad \longrightarrow \quad S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$$

$$\frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6} (n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot (2(n+1)+1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{S_n} \quad \underbrace{\hspace{5em}}_{a_{n+1}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{S_{n+1}}$

$$\frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot [n \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1)] = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot [(n+2) \cdot (2n+3)]$$

$$\frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot [2n^2 + 7n + 6] = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot [2n^2 + 7n + 6]$$

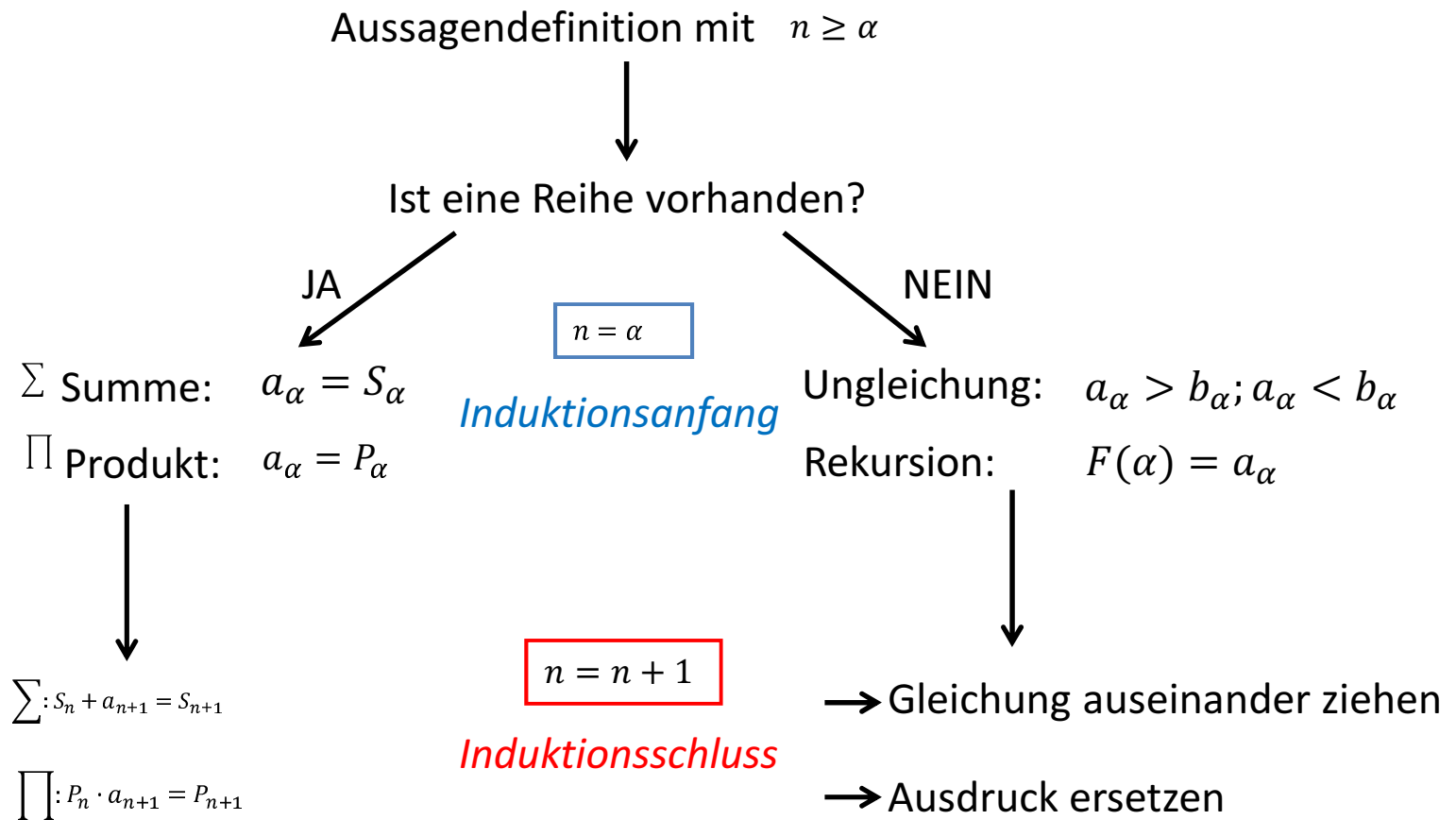
AUFGABEN I

Zeigen Sie mittels dem Verfahren der vollständigen Induktion, dass die folgenden Aussagen bzw. Zusammenhänge gültig sind:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n k \cdot (k+1)^2 = \frac{1}{12} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (3n+5)$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^n \binom{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

ENTSCHEIDUNGSBAUM



TEILBARKEIT

Eine Formel / Term sei durch γ teilbar. Beweis?



$$\text{Formel} = \gamma \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$

Induktionsanfang:

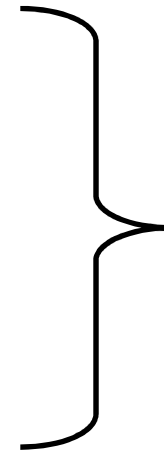
$$n = \alpha$$

$$\text{Formel}(\alpha) = \gamma \cdot k$$

Induktionsschluss:

$$n = n + 1$$

$$\text{Formel}(n + 1) = \gamma \cdot k$$



Es ist zu zeigen,
dass beide Ausdrücke
den Rückschluss
zu $k \in \mathbb{Z}$
ermöglichen.

AUFGABEN

- 1) In einem Betrieb mit n PCs soll ein vollständiges Netzwerk aufgebaut werden, bei dem jeder Computer direkt mit jedem anderen Computer verbunden ist. Finden Sie eine möglichst einfache Formel für die Anzahl der benötigten Verbindungen und beweisen Sie diese.

Tipp:
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n \cdot (n + 1)$$