MATHEMATIK

29.11.2018

VOKABELN VOM 26.11.2018

Folge
intuitive Darstellung
explizite Darstellung
rekursive Darstellung
Monotonie
Quotientenverfahren
Differenzmethode
Schranken
Konvergenz
Grenzwert
Supremum
Infimum

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was sind die wesentlichen Merkmale einer Folge?
- ✓ Was versteht man unter der intuitiven Darstellung?
- ✓ Wie wird eine Folge explizit definiert?
- ✓ Was ist die synonyme Bezeichnung für explizit?
- ✓ Was versteht man unter einer rekursiven Folge?
- ✓ Warum ist das Startelement bei rekursiven Folgen wichtig?
- ✓ Wie sind die geraden bzw. ungeraden Zahlenfolgen definiert?
- ✓ Wie erfolgt der Beweis von Folgen?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben zu den Darstellungsformen von Folgen?
- ✓ Wie beweist man die Monotonie einer Folge?
- ✓ Wie zeigt man die Gültigkeit von Schranken?
- ✓ Was bedeutet die Konvergenz einer Folge?
- ✓ Wie berechnet man den Grenzwert einer Folge?
- ✓ Was gibt es für eine Methodik zum Konvergenzbeweis?
- ✓ Was ist bei einer rekursiven Folge anders?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN I

1) Bestimmen Sie zu den gegebenen Folgen deren Monotonieverlauf und die zugehörigen Schranken und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.
   Begründen Sie ferner die Konvergenz der Folgen und berechnen deren Grenzwert.

   a) $$a_n = \frac{n-3}{2n};n \geq 1$$

   b) $$a_n = 3 + \left(\frac{2}{5}\right)^n;n \geq 0$$

REKURSIVE FOLGEN I

Auch bei einer **rekursiv** definierten Folge erfolgt der Beweis der Konvergenz mittels des **Monotoniebeweis** (Seite 155) und dem **Schrankenbeweis** (Seite 160).
Da diese Folge jedoch direkt von mind. einem Vorgängerelement abhängig ist, existieren einige wesentliche Unterschiede im Bereich der **Beweisführung**:

1) Im Bereich der Monotonie muss nach dem Induktionsschluss die gestellte **Behauptung** als Lösung **herauskommen**.

2) Bei den Schranken wird die Behauptung vorausgesetzt und mittels elementarer Umformungen die **Ausgangsfolge** erzeugt.

3) Der Grenzwert wird mittels **Substitution** berechnet, in dem man voraussetzt, dass das Element an der Stelle **n** und (**n+1**) für n gegen unendlich **identisch** ist.

REKURSIVE FOLGEN II

Beispiel: $a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + a_n^2}; a_1 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + a_1^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{12} > \frac{1}{4}$$

<u>Monotonie</u>: $a_{n+1} > a_n$ (*Behauptung – monoton steigend)*)

$$n = 1 : a_2 > a_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{17}}{12} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{17} > 3$$

$$n = n + 1 : a_{n+2} > a_{n+1}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + a_{n+1}^2} > \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + a_n^2} \qquad | \cdot 3; \uparrow^2$$

$$1 + a_{n+1}^2 > 1 + a_n^2 \qquad | -1; \sqrt{\ }$$

$$a_{n+1} > a_n$$

REKURSIVE FOLGEN III

Beispiel: $a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+a_n^2}; a_1 = \frac{1}{4}$

Schranken:

Da die Folge streng monoton steigt, muss $a_1 = \frac{1}{4}$ untere Schranke sein.

$a_n < 1$ (*Behauptung - obere Schranke*)

$\frac{1}{3} \cdot$

$$n = 1: a_1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < 1$$

$$n = n+1:$$

$$a_n < 1 |\uparrow^2 \Leftrightarrow a_n^2 < 1^2 \,|+1 \Leftrightarrow 1 + a_n^2 < 1^2 + 1 = 2 \,|\sqrt{}$$

$$\sqrt{1+a_n^2} < \sqrt{2} \,|\cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+a_n^2} < \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$$

REKURSIVE FOLGEN IV

Beispiel: $a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+a_n^2}; a_1 = \frac{1}{4}$

<u>Konvergenz</u>:

Da die Folge streng monoton steigt, und durch $a_{n+1} \in \left[\frac{1}{4};1\right[$ beschränkt ist, ist sie konvergent und der Grenzwert existiert.

<u>Grenzwert:</u>

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) \wedge \lim_{n\to\infty}(a_n) = \alpha}$$

Substitution

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+\alpha^2} \; | \cdot 3; \uparrow^2$$

$$9\alpha^2 = 1+\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \sqrt{\frac{1}{8}} \in \left[\frac{1}{4};1\right[$$

AUFGABEN III

1) Begründen Sie, dass die gegebenen Folgen konvergent sind Folgen und berechnen deren Grenzwert.

   a) $$a_{n+1} = -\frac{1}{3} \cdot (3 - 2a_n); a_1 = 3$$

   b) $$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{3}\right)^3 + 2; a_1 = 0$$