MATHEMATIK

19.11.2018

AUFGABEN FUNKTION I

1. Untersuchen Sie die folgenden Relationen im Hinblick auf die Eigenschaften einer Funktion und fertigen eine grobe Skizze an.
   Passen Sie die Relation ggf. so an, dass eine bijektive Funktion entsteht.

a) $\lambda = \{(x, y) \in R \times R \,\middle|\, \mathrm{y} = \frac{1}{3} x^3 - 4\}$

b) $\phi = \{(x, y) \in R \times R \,\middle|\, \mathrm{y} = 3 \cdot \sqrt[5]{x} + 5\}$

c) $\varpi = \{(x, y) \in R^+ \times [1;10] \,|\, \mathrm{y} = -\cos(x) + 2\}$

AUFGABEN FUNKTION II

3. Gegeben sind die folgenden Relationen.

   - Machen Sie aus ihnen eine bijektive Funktion
   - Bestimmen Sie die zugehörigen Umkehrfunktion

   a) $\lambda = \{(x, y) \in N \times N \mid 2\text{y} = 4x - 3\}$

   b) $\phi = \{(x, y) \in R \times R^{-} \mid \text{y} = \sqrt{2 - x} + 1\}$

   c) $\varpi = \{(x, y) \in R \times R \mid \text{y} = e^{2x} + 1\}$

4. Bilden Sie zu den gegebenen Funktionen möglichen Kombinationen und untersuchen Sie die Symmetrieeingeschaften der Funktionen.

   a) $\text{f}(\text{x}) = 3x^2 - 4$ b) $\text{g}(\text{x}) = \frac{3}{4\text{x}}$ c) $\text{h}(\text{x}) = 2^{8x^3 - 4x}$

AUFGABEN FUNKTION III

1. Gegeben ist die folgende Relation.

   - Machen Sie aus ihr eine bijektive Funktion
   - Bestimmen Sie die zugehörige Umkehrfunktion

$$\lambda = \{(x, y) \in N \times N \mid \mathrm{y} = \frac{1}{x^2 - 16} + 2\}$$

2. Zerlegen Sie die folgende Funktion in ihre Bestandteile und geben mindestens 3 weitere Kompositionen und deren Definitions- und Wertebereich an.

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 3 \cdot \sqrt[5]{10^{\sin\left((2x-5)^2\right)}}$$

3. Geben Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an, beweisen das Symmetrieverhalten und fertigen eine grobe Skizze an.

a) $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 2 \cdot \cos(4x) - 7$ b) $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = \dfrac{-3}{x^3 - 2{,}5x}$

VOKABELN VOM 15.11.2018

Teilbarkeit
größter gemeinsamer Teiler (ggT)
kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)
Primzahl
Primfaktorzerlegung
Euklidischer Algorithmus

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie wird die Teilbarkeitsrelation definiert?
- ✓ Welche Eigenschaften besitzt die Teilbarkeit?
- ✓ Was bedeutet der ggT(Zahl_1, Zahl_2)?
- ✓ Wofür braucht man das kgV(Zahl_1, Zahl_2)?
- ✓ Wie ist eine Primzahl definiert?
- ✓ Was ist die kanonische Darstellung als Produkt einer Zahl?
- ✓ Wie nutzt man die Primfaktorzerlegung für ggT / kgV?
- ✓ Wie funktioniert der euklidische Algorithmus?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben zu der Zahlentheorie.
- ✓ Was versteht man unter einer Zahlenfolge?
- ✓ Was ist der Induktionsanfang?
- ✓ Wie ist der Induktionsschluss aufgebaut?
- ✓ Warum funktioniert die vollständige Induktion?
- ✓ Wie zeigt man die allgemeine Gültigkeit einer Ungleichung?
- ✓ Wie beweist man die generelle Teilbarkeit?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1. Berechnen Sie das ggT mit dem Euklidischen Algorithmus und bestimmen das kgV durch die vorhandenen Primfaktoren.

a) $a = 4.200 \wedge b = 43.120$

b) $a = 2.772 \wedge b = 145.530$

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION I

Eine von *n* abhängige **Aussage** *A(n)* sei für alle **natürlichen Zahlen** definiert.
Um zu zeigen, dass der Ausdruck / Term für jedes beliebige n **gültig** ist, nutzt man das **Beweisverfahren** der **vollständigen Induktion** durch die folgenden beiden Schritte:

1. <u>Induktionsanfang:</u>

   Es wird geprüft, ob die Aussage für das 1. Element stimmt.

   $$\boxed{\mathrm{A(1.Element)\,ist\ wahr}}$$

2. <u>Induktionsschluss:</u>

   Es wird vorausgesetzt, dass A(n) wahr ist und man zeigt, dass die Aussage dann auch an der Stelle (n+1) gültig ist.

   $$\boxed{\mathrm{Prämisse: A(n)\,ist\ wahr} \Rightarrow \mathrm{A(n+1)\,ist\ wahr}}$$

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION II

<u>Beispiel (Folgen)</u>: $(\mathrm{n}+1)! > 3^n; n > 3$

1. Induktionsanfang: $n = 4 : (4+1)! > 3^4 \Leftrightarrow 5! > 3^4 \Leftrightarrow 120 > 81$

2. Induktionsschluss: Es wird vorausgesetzt, dass $(\mathrm{n}+1)! > 3^n$ für alle n>3 gültig ist.

$n = n+1:$

$((n+1)+1)! > 3^{n+1} \Leftrightarrow (n+2)! > 3^{n+1}$

$(n+1)! \cdot (n+2) > 3^n \cdot 3^1$

auseinanderziehen

einsetzen

$3^n \cdot (n+2) > 3^n \cdot 3 \Leftrightarrow n+2 > 3 \Leftrightarrow n > 1$

$(n+1)! \cdot (n+2) > (n+1)! \cdot 3 \Leftrightarrow n+2 > 3 \Leftrightarrow n > 1$

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION III

Beispiel (Teilbarkeit): $n^2 - n; n > 1$ *ist durch 2 teilbar*

1. Induktionsanfang:

   $n = 2:$

   $2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 = 2 \cdot k; k \in Z$

2. Induktionsschluss:

   Es wird vorausgesetzt, dass $n^2 - n$ für alle n>1 durch 2 teilbar ist.

   $n = n + 1:$

   $(n+1)^2 - (n+1) = (n^2 + 2n + 1) - (n+1) = n^2 + n$

   $(n^2 - n) + 2 \cdot n = 2 \cdot k_1 + 2 \cdot n = 2 \cdot (k_1 + n) = 2 \cdot k_2;$

   $n > 1 \wedge k_x \in Z$

AUFGABEN

Zeigen Sie mittels dem Verfahren der vollständigen Induktion, dass die folgenden Aussagen bzw. Zusammenhänge gültig sind:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2}$

b) $1 + n \cdot \gamma \leq (1 + \gamma)^n ; \gamma \in R \wedge n \geq 0$

c) $n^3 - 4n; n \geq 1$
ist durch 3 teilbar

d) $3^{2n} + 7; n \geq 0$
ist durch 8 teilbar