MATHEMATIK

15.11.2018

VOKABELN VOM 12.11.2018

- rechtseindeutig
- injektiv (linkseindeutig)
- surjektiv (rechtstotal)
- total (linkstotal)
- bijektiv
- Umkehrfunktion
- Komposition
- Achsensymmetrie
- Punktsymmetrie

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was bedeutet die Rechtseindeutigkeit einer Relation?
- ✓ Was weiß man von einer surjektiven Funktion?
- ✓ Wann ist eine Funktion total / partiell?
- ✓ Welche Bedeutung hat die Eigenschaft injektiv?
- ✓ Wie kann man eine Funktion bijektiv machen?
- ✓ Wie berechne ich die Umkehrfunktion mathematisch?
- ✓ Was ist die Komposition einer Funktion?
- ✓ Welche Arten der Symmetrie können entstehen?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben zu Eigenschaften von Funktionen.
- ✓ Was kann man aufgrund der Teilbarkeit folgern?
- ✓ Wie ist der größte gemeinsame Teiler definiert?
- ✓ Wie funktioniert der Euklidische Algorithmus?
- ✓ Wie funktioniert die Primfaktorzerlegung?
- ✓ Was haben Primzahlen mit dem kgV zu tun?
- ✓ Wie werden Intervalle definiert?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN FUNKTION

1. Gegeben sind die folgenden Relationen.

   - Machen Sie aus ihnen eine bijektive Funktion
   - Bestimmen Sie die zugehörigen Umkehrfunktion

   a) $\lambda = \{(x,y) \in N \times N \mid y = x^2 - 8x + 22\}$ b) $\phi = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{4}{x^2 - 8} - 4\}$

2. Zerlegen Sie die folgende Funktion in ihre Bestandteile und geben mindestens 3 weitere Kompositionen und deren Definitions- und Wertebereich an.

$$f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{(x-3)^3}}\right)$$

3. Geben Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an, beweisen das Symmetrieverhalten und fertigen eine grobe Skizze an.

   a) $f(x) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{3}{2}$ b) $g(x) = -\frac{2}{2x - x^3}$ c) $h(x) = 10^{2x^2 - 8}$

TEILBARKEIT

Eine ganze Zahl *a* ist dann durch eine ganze Zahl *b* teilbar, wenn das Ergebnis *q* der Division ebenfalls eine ganzen Zahlen ist, so dass man die Teilbarkeitsrelation wie folgt definieren kann:

$$| = \{(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in Z \times Z \mid b = q \cdot a; q \in Z\}$$

In der Mathematik nutzt man anstelle von $(a, b) \in |$ primär die Infix-Notation $a|b$ (gesprochen: *a* teilt *b*).

Daraus ergeben sich die folgenden Regeln / Zusammenhänge:

- Transitivität: $a|b \ \wedge b|c \qquad \rightarrow a|c$
- Kürzbarkeit: $c \cdot a|c \cdot b \qquad \rightarrow a|b; c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
- Produktregel: $a|b \ \wedge c|d \qquad \rightarrow a \cdot c|b \cdot d$
- Linearität: $a|b_1 \ \wedge a|b_2 \qquad \rightarrow a|m \cdot b_1 + n \cdot b_2; m, n \in \mathbb{Z}$

DIVISION MIT REST

Bei einer ganzzahligen Division mit Rest werden zwei Zahlen $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{a} \neq 0$ betrachtet. Bei der Division entstehen immer zwei eindeutige Zahlen $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathbb{Z}$, so dass die größere Zahl *b* stets als *Produkt + Rest* beschrieben werden kann.

$$b = q \cdot a + r \quad mit \quad 0 \leq q < |a|$$

Als ganzzahlige Division von *b* und *a* erhält man demzufolge *q* und es gilt: $\frac{b}{Z^a} = q$

Diese Definition des Rests haben wir bereits auf Seite 7 mit der Modulo-Operation kennen gelernt. Bei der Modulo-Operation erhalten wir nur den Rest der Division.

Beispiel: $a = 8; b = 115$

$$115 = 112 + 3 = 14 \cdot 8 + 3 \Rightarrow q = 14, r = 3$$

Es gilt demzufolge: $\frac{115}{Z^8} = 14$ und $115 \; mod \; 8 = 3$

GRÖßTER GEMEINSAMER TEILER

<u>ggT: größter gemeinsamer Teiler:</u>

Beim größten gemeinsamen Teiler sucht man die größtmögliche natürliche Zahl, die zwei oder mehr Zahlen ganzzahlig teilt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $d|a$ und $d|b$, wodurch *d* ein gemeinsamer Teiler von *a* und *b* sein muss.
Wenn jetzt für jeden anderen gemeinsamen Teiler *c* von *a* und *b* gilt, dass c$|d$, dann ist *d* auch der größte gemeinsame Teiler von *a* und *b*:

$$d = ggT(a, b)$$

Haben zwei Zahlen als größten gemeinsamen Teiler nur die eins, so dass $ggT(a, b) = 1$ gilt, so sind die Zahlen teilerfremd.

KLEINSTES GEMEINSAMES VIELFACHES

kgV: kleinstes gemeinsames Vielfaches:

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Pendant zum zuvor definierten ggT.

Es wird hier eine möglichst kleine natürliche Zahl gesucht, die das Vielfache zweier Zahlen darstellt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $a|d$ und $b|d$, wodurch *d* ein gemeinsames Vielfaches von *a* und *b* sein muss.
Wenn jetzt für jedes andere gemeinsame Vielfache *c* von *a* und *b* gilt, dass $d|c$, dann ist *d* auch das kleinste gemeinsame Vielfache von *a* und *b*:

$$d = kgV(a, b)$$

Für die Berechnungen des ggT(a,b) und auch kgV(a,b) nutzt man u.a. das Verfahren der Primfaktorzerlegung.

PRIMFAKTORZERLEGUNG I

Primzahl:

Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist eine Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist: $P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...\}$

Primfaktorzerlegung:

Eine natürliche Zahl $p > 1$ kann als Produkt von Primzahlen dargestellt werden. Sortiert man diese Primfaktoren, so erhält man die kanonische Darstellung.

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n$$

Für die Zerlegung faktorisiert man die Ausgangszahl und startet bei der kleinsten Primzahl und fass anschließend gleiche Faktoren zusammen.

$$504 = 2 \cdot 252 = 2 \cdot 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2^3 \cdot 63$$
$$63 = 3 \cdot 21 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$$

$$\Rightarrow 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

PRIMFAKTORZERLEGUNG II

Anwendung auf ggT(a,b) und kgV(a,b):

Im ersten Schritt zerlegt man die zu betrachtenden Zahlen in deren Primfaktoren.

$$160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^5 \cdot 5$$
$$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$$

ggT - Bestimmung:

Zur Berechnung des ggT fasst man die gleichen Primfaktoren als Produkt zusammen:

$$\Rightarrow ggT(160{,}144) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

kgV - Bestimmung:

Zur Berechnung des kgV nimmt man die am häufigsten vorkommenden Primfaktoren und setzt diese zu einem Produkt zusammen:

$$\Rightarrow kgV(160{,}144) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 32 \cdot 9 \cdot 5 = 1.440$$

AUFGABEN

1. Zerlegen Sie die gegebenen Zahlen im ersten Schritt in deren Primfaktoren und bestimmen anschließend den größten gemeinsamen Teiler ggT sowie das kleinste gemeinsame Vielfache kgV.

a) $a = 3.528 \wedge b = 3.780$

b) $a = 776.160 \wedge b = 2.494.800$

c) $a = 1.008 \wedge b = 1.080 \wedge c = 2.940$

EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, kann man den ggT(a,b) einfach bestimmen.

Es gilt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$

1. Berechnung der ganzzahligen Division mit Rest: $b = q \cdot a + r \quad mit \quad 0 \leq q < |a|$

2.1. Ist $r \neq 0$, dann ersetze $b \coloneqq a$ und $a \coloneqq r$ und Starte wieder bei 1.

2.2. Ist $r = 0$, dann ist a der gesuchte Wert vom ggT(a,b).

Beispiel: $ggT(1.264\,,\ 616)$

$$
\begin{aligned}
1.264 \quad &= 2 \cdot 616 + 32 \\
616 \quad &= 19 \cdot 32 + 8 \\
32 \quad &= 4 \cdot 8 + 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow ggT(1.264\,, 616) = 8$$

AUFGABEN

1. Wenden Sie bei den folgenden Aufgaben den Euklidischen Algorithmus an und bestimmen somit den ggT.

a) $a = 840 \wedge b = 980$

b) $a = 975 \wedge b = 2.340$

c) $a = 96.096 \wedge b = 1.092$