MATHEMATIK

08.11.2018

VOKABELN VOM 05.11.2018

Relation
Domain
Range
Identität
vollständige Relation
leere Relation
inverse Relation
Eigenschaften
(ir)reflexiv
linkstotal
partiell
rechtstotal

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was wird durch eine Relation beschrieben?
- ✓ Worauf basiert jede Relation?
- ✓ Was bedeutet DOM(p) bzw. RAN(p)?
- ✓ Welche besonderen Typen von Relation existieren?
- ✓ Beschreiben Sie die möglichen Symmetrien einer Relation?
- ✓ Was bedeutet eine verbale / mathematische Relation?
- ✓ Was wird durch total bzw. partiell beschrieben?
- ✓ Wie sieht eine ausschließlich reflexive Relation grafisch aus?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben zur Beschreibung einer Relation?
- ✓ Was bedeutet die Art einer Relation?
- ✓ Was ist eine Äquivalenzrelation?
- ✓ Wie kann man eine Äquivalenzrelation beweisen?
- ✓ Was bedeutet eine Ordnungsrelation?
- ✓ Wie kann man eine Ordnungsrelation nachweisen?
- ✓ Methodik zur Klassifizierung einer Relation?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN RELATIONEN IV

1) Gegeben sei die Menge $A = \{Alle\ Kinder\ in\ einem\ Kindergarten\}$.
   Geben Sie alle relevanten Eigenschaften der folgenden Relation an und begründen diese.

$$\delta = \{(a, b) \in AxA |\ Kind\ a\ ist\ jünger\ oder\ gleich\ alt\ wie\ Kind\ b\}$$

2) Klassifizieren Sie die Relation $\phi = \left\{(a,b) \in Q^+ x Q^+ \,|\, b = \frac{a}{(42 \cdot x)}, x \in Q^+\right\}$.

ARTEN VON RELATIONEN

Entscheidungsbaum

RELATION

reflexiv

↓

transitiv

↙ ↘

symmetrisch | *antisymmetrisch*

⬇ Äquivalenzrelation

Durch diese Form der Relation ist es möglich **Klassen** zu bilden, wobei eine **Äquivalenzklasse** stets der **Ausprägung** eines **Repräsentanten** der Relation entspricht. (*siehe Mengenlehre*)

⬇ Ordnungsrelation

Dies Form der Relation ermöglicht es **basierend** auf der **Grundmenge** M eine **geordnete Menge** darzustellen, d.h. die Tupel können in eine **natürliche Reihenfolge** gebracht werden.

METHODIK ZUR KLASSIFIZIERUNG I

$$\text{Symbol} = \{\underbrace{\text{Tupel} \in \text{Kartesischem Produkt}}_{\text{Welt}} \mid \underbrace{\text{Formel oder Aussage}}_{\text{Bedingung}}\}$$

<u>Relation 1:</u> $\Theta = \{(x, y) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} \mid x \geq y\}$

✓ $\boxed{\text{reflexiv: } (a, a) \in \text{Relation für } \textbf{jedes } a \in \text{Menge}}$

in Bedingung einsetzen

$(x, x) \in \Theta; x \in \mathrm{N}$, da $x \geq x$ gilt.

✓ $\boxed{\text{transitiv: } \left.\begin{matrix} (a, b) \in \text{Relation} \\ (b, c) \in \text{Relation} \end{matrix}\right\} (a, c) \in \text{Relation}}$

in Bedingung einsetzen

$$(x, y) \in \Theta \wedge (y, z) \in \Theta \Rightarrow (x, z) \in \Theta$$

da $x \geq y \wedge y \geq z \Leftrightarrow x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq z$

METHODIK ZUR KLASSIFIZIERUNG II

Relation 1: $\Theta = \{(x, y) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} \mid x \geq y\}$

✓ $\boxed{\text{antisymmetrisch:} \quad \left.\begin{array}{l} (a,b) \in \text{ Relation} \\ (b,a) \notin \text{ Relation} \end{array}\right\} \text{außer } a = b}$

$(x, y) \in \Theta \wedge (y, x) \notin \Theta; x \neq y$

da $x \geq y \wedge y \ngeq x$ außer $x = y$

in Bedingung einsetzen

✓ $\boxed{\text{total:} \quad (a,b) \in \text{Relation} \vee (b,a) \in \text{ Relation}}$

$(x, y) \in \Theta \vee (y, x) \in \Theta; x, y \in M$

da $x \geq y \vee y \geq x$ für alle $x, y \in R$

in Bedingung einsetzen

Totale Ordnungsrelation

METHODIK ZUR KLASSIFIZIERUNG III

$$\text{Symbol} = \{\underbrace{\text{Tupel} \in \text{Kartesischem Produkt}}_{\text{Welt}} \mid \underbrace{\text{Formel oder Aussage}}_{\text{Bedingung}}\}$$

<u>Relation 2:</u> $\Omega = \{(a,b) \in M \times M \mid Wohn - Straße(a) = Wohn - Straße(b)\}$

✓ reflexiv: $(a,a) \in$ Relation für **jedes** $a \in$ Menge

in Bedingung einsetzen

jeder wohnt mit sich in der gleichen Straße.

✓ transitiv: $\left.\begin{array}{l}(a,b) \in \text{Relation} \\ (b,c) \in \text{Relation}\end{array}\right\} (a,c) \in \text{Relation}$

in Bedingung einsetzen

wenn Person A und Person B in der gleichen Straße wohnen und dies auch Person B und C tun, so muss auch Person A und C in der gleichen Straße wohnen.

METHODIK ZUR KLASSIFIZIERUNG IV

<u>Relation 2:</u> $\Omega = \{(a,b) \in M \times M \mid Wohn-Straße(a) = Wohn-Straße(b)\}$

✓ symmetrisch: $(a,b) \in$ Relation $\Leftrightarrow$ $(b,a) \in$ Relation

wenn eine Person A mit einer Person B in der gleichen Straße wohnt, so gilt dies auch für die Person B (umgekehrt).

in Bedingung einsetzen

✓ total: $(a,b) \in$ Relation $\vee$ $(b,a) \in$ Relation

für jede Person aus der Menge gilt, dass sie entweder mit einer anderen Person in der gleichen Straße wohnt oder nicht.

in Bedingung einsetzen

➡ **Totale Äquivalenzsrelation**

Klassen: Eine Klasse entspricht stets der Ausprägung eines Repräsentanten sprich in unserem Fall einer Person.
Also sind die **Äquivalenzklassen** die **Straßen**.

AUFGABEN RELATIONEN III

3) Begründen Sie bei den folgenden Definitionen zum einen warum es tatsächlich eine Relation ist und zum anderen um welche Art der Relation es sich dabei handelt. *(Ordnungs-/ Äquivalenzrelation)*

a) $$\Omega = \left\{ (x, y) \in \Re^2 x \Re^2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \cdot y_1 \\ \beta \cdot y_2 \end{pmatrix}, \beta \in \Re^+ \right\}$$

b) $$\lambda = \{(a,b) \in Z \times Z \,\middle|\, b = k \cdot a, k \in Z\} \subseteq Z \times Z$$

c) Es wird durch eine Relation die PS-Zahl aller PKWs auf dem Campus beschrieben, wobei die PS-Zahl des ersten Autos kleiner oder gleich der PS-Zahl des zweiten Autos sein muss.