MATHEMATIK

05.11.2018

VOKABELN VOM 29.10.2018

Formalisierung
Literal
Konjunktionsterm
Minterm
Disjunktionsterm
Maxterm
kanonisch
konjunktive Normalform
disjunktive Normalform

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was ist ein Konjunktions- bzw. Disjunktionsterm?
- ✓ Aus welchen Junktoren besteht eine Normalform?
- ✓ Wie bildet man die KNF mittels Wahrheitstabelle?
- ✓ Was ist ein Literal?
- ✓ Was beschreibt der Min- bzw. Maxterm?
- ✓ Was existiert immer, wenn keine Tautologie vorhanden ist?
- ✓ Wie erhält man eine kanonische Struktur?
- ✓ Was bedeutet der Begriff äquivalente DNF?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wie wird eine Relation definiert?
- ✓ Wie wird eine verbale /mathematische Relation definiert?
- ✓ Was bedeutet Domain und Range?
- ✓ Welche besonderen Relationen gibt es?
- ✓ Wiederholung der Symmetrieeigenschaften von Tupeln?
- ✓ Was bedeuten die Begriffe links- und rechtstotal?
- ✓ Welche zusätzlichen Eigenschaften besitzen Relationen?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Gegeben sei die Formel mit $(\neg z \land x) \lor (\neg x \land y)$.

   a) Bilden Sie mittels einer Wahrheitstabelle die kanonische KNF.

   b) Geben Sie durch die Anwendung der Gesetze der Aussagenlogik die äquivalente konjunktive Normalform an.
   Nennen Sie dabei zu jedem Schritt das angewandte Gesetz an.

LÖSUNG

1) a)

x	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**F**	**F**	**F**
y	**W**	**W**	**F**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**
z	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**
$\neg z \wedge x$	F	W	F	W	F	F	F	F
$\neg x \wedge y$	F	F	F	F	W	W	F	F
$T_1 \vee T_2$	F	W	F	W	W	W	F	F

$$(\neg \boldsymbol{x} \vee \neg \boldsymbol{y} \vee \neg \boldsymbol{z}) \wedge (\neg \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \vee \neg \boldsymbol{z}) \wedge (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \vee \neg \boldsymbol{z}) \wedge (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{z})$$

b) $(\neg z \wedge x) \vee (\neg x \wedge y)$ *Distibutivgesetz*

$\big((\neg z \wedge x) \vee \neg x\big) \wedge \big((\neg z \wedge x) \vee y\big)$ *Distibutivgesetz*

$(\neg z \vee \neg x) \wedge (x \vee \neg x) \wedge (\neg z \vee y) \wedge (x \vee y)$ *Tertium non datur*

$(\neg \boldsymbol{z} \vee \neg \boldsymbol{x}) \wedge (\neg \boldsymbol{z} \vee \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y})$

RELATIONEN I

Eine **Relation** stellt die Objekte eines **kartesischen Produkts** in Beziehung, d.h. es werden aus allen möglichen **Tupeln** der Kombination von n-Mengen nur eine definierte Menge dargestellt.
Somit enthält die Relation *P* nur die n-Tupel, die die **Bedingung** der Relation **erfüllt**.

$$\underset{\text{Symbol}}{\Phi} = \{\underbrace{(a,b)\in A\times B}_{\text{Welt}} \mid \underbrace{Formel(a) \leftrightarrow Formel(b)}_{\text{Bedingung}}\}$$

<u>Symbol</u>: Platzhalter für die Relation

<u>Welt</u>: Tupel aus dem kartesische Produkt

<u>Bedingung</u>: Mathematische Formel bzw. verbaler Ausdruck

RELATIONEN II

Beispiel:

$$\underbrace{M = \{1;2;3;4;5\}}_{\text{Ausgangsmenge}} \Rightarrow M \times M = \underbrace{\left\{ \begin{matrix} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5); \\ (2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5); \\ (4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5); \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5); \end{matrix} \right\}}_{\text{Kartesisches Produkt}}$$

$$\Theta = \{\underbrace{(x, y) \in M \times M}_{\text{Welt}} \mid \underbrace{x > y}_{\text{Bedingung}}\}$$

$$\Theta = \underbrace{\{(2,1);(3,1);(3,2);(4,1);(4,2);(4,3);(5,1);(5,2);(5,3);(5,4)\}}_{\text{Relation}}$$

RELATIONEN III

Es besteht stets eine **Teilmengenbeziehung** zwischen der **Relation** und dem zugrundeliegenden **kartesischen Produkt** der Ausgangsmengen.

$$P \subset M_1 \times M_2$$

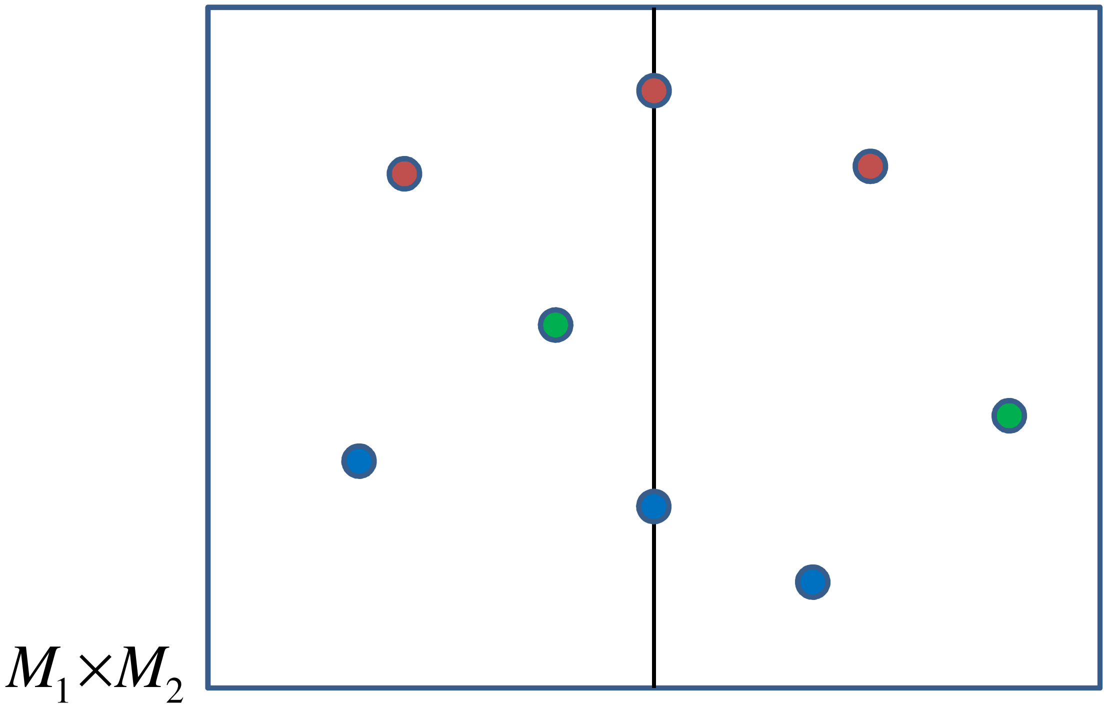
<u>Für die Mengen in einer Relation gilt:</u>

- ✓ Definitionsbereich: DOM(*P*) -> Domain(*P*)
- ✓ Wertebereich: RAN(*P*) -> Range(*P*)

<u>Besondere Arten von Relationen:</u>

- ✓ Identität: $P = \{(x, x) \mid x \in M\}$
- ✓ vollständige Relation: $P = \{(x, y) \mid x \in M_1 \wedge y \in M_2\}$
- ✓ Leere Relation: $P = \{\ \}$
- ✓ Inverse Relation: $P^{-1} = \{(y, x) \in M_2 \times M_1 \mid (x, y) \in P\}$

SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN



✓**Symmetrie:**
Zu jedem Punkt gehört ein Spiegelpunkt.

✓**Asymmetrie:**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt.

✓**Antisymmetrie:**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt aber mindestens ein Punkt auf der Spiegelachse.

Sind mehrere Symmetrievarianten vorhanden, so kann keinerlei Aussage über das Symmetrieverhalten getroffen werden.

RELATIONEN IV

Es können die folgenden **Eigenschaften** einer Relation definiert werden:

- ✓ reflexiv: für **jedes** $a \in M : (a,a) \in P$
- ✓ irreflexiv: für **jedes** $a \in M : (a,a) \notin P$

- ✓ symmetrisch: $(a,b) \in P \Leftrightarrow (b,a) \in P$
- ✓ asymmetrisch: $(a,b) \in P \Leftrightarrow (b,a) \notin P$
- ✓ antisymmetrisch: $(a,b) \in P \Leftrightarrow (b,a) \notin P$, außer $a = b$

- ✓ transitiv: $(a,b) \in P \wedge (b,c) \in P \Rightarrow (a,c) \in P$

- ✓ linkstotal: $DOM(P) = M_1$
- ✓ partiell: $DOM(P) \subseteq M_1$
- ✓ rechtstotal: $RAN(P) = M_2$

RELATIONEN V

Beispiel: M = Menge aller Studierenden an der THM

$$\Psi = \{(x, y) \in M \times M \mid Schuhgröße(x) = Schuhgröße(y)\}$$

✓ reflexiv: $(x, x) \in \Psi$

Jede Person hat mit sich selbst die gleiche Schuhgröße

✓ symmetrisch: $(x, y) \in \Psi \Leftrightarrow (y, x) \in \Psi$

Wenn ein Student *X* mit einem Student *Y* die gleiche Schuhgröße hat, so gilt dies auch umgekehrt.

✓ transitiv: $(x, y) \in \Psi \wedge (y, z) \in \Psi \Rightarrow (x, z) \in \Psi$

Wenn ein Student *X* mit einem Student *Y* und ein Student *Y* mit einem Studenten *Z* die gleiche Schuhgröße hat, so muss auch Student *X* und *Z* die gleiche Schuhgröße haben.

AUFGABEN RELATIONEN I

<u>Aufgabe 1</u>

M = Menge der ganzen Zahlen

$$\Theta = \{(x, y) \in M \times M \mid x \geq y\}$$

Bestimmen und beweisen Sie alle zu der Relation gehörigen Eigenschaften und beschreiben die Lösungsmenge grafisch.

<u>Aufgabe 2</u>

M = Menge aller Einwohner von Tiefengruben

$$\Omega = \{(a, b) \in M \times M \mid Wohn-Straße(a) = Wohn-Straße(b)\}$$

Bestimmen und beweisen Sie alle zu der Relation gehörigen Eigenschaften.

Welche Gruppen könnten Sie bilden?