

# MATHEMATIK

**01.11.2018**

# VOKABELN VOM 29.10.2018

|                            |
|----------------------------|
| Aussage(form)              |
| Wahrheitsbelegungsfunktion |
| Konjunktion                |
| Disjunktion                |
| Subjunktion                |
| Bijunktion                 |
| Wahrheitstabelle           |
| Boolean                    |
| Erfüllungsmenge            |
| Tautologie                 |
| Kontingenz                 |
| Kontradiktion              |
| Implikation                |
| Äquivalenz                 |

# WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann handelt es sich um eine Aussage?
- ✓ Was ist eine Aussageform?
- ✓ Was versteht man unter Bijunktion bzw. Subjunktion?
- ✓ Welche Operatoren stammen direkt aus der Mengenlehre?
- ✓ Was beschreibt die Erfüllungsmenge einer Aussage?
- ✓ Wann benutzt man den Ausdruck Bool?
- ✓ Wie kann man in der Wahrheitstabelle effektiv arbeiten?
- ✓ Was ist neutral in der Aussagenlogik?

# ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was bedeutet es zu formalisieren?
- ✓ Die drei Schritte der Formalisierung.
- ✓ Was ist ein Konjunktions- oder Disjunktionsterm?
- ✓ Was versteht man unter einer Normalform?
- ✓ Was bedeutet konjunktive (KNF) bzw. disjunktive (DNF) Normalform?
- ✓ Wie kann eine KNF oder DNF bestimmen?
- ✓ Was bedeutet in dem Zusammenhang der Begriff kanonisch?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

# AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die Formelklassen der folgenden Aussagen und interpretieren diese.

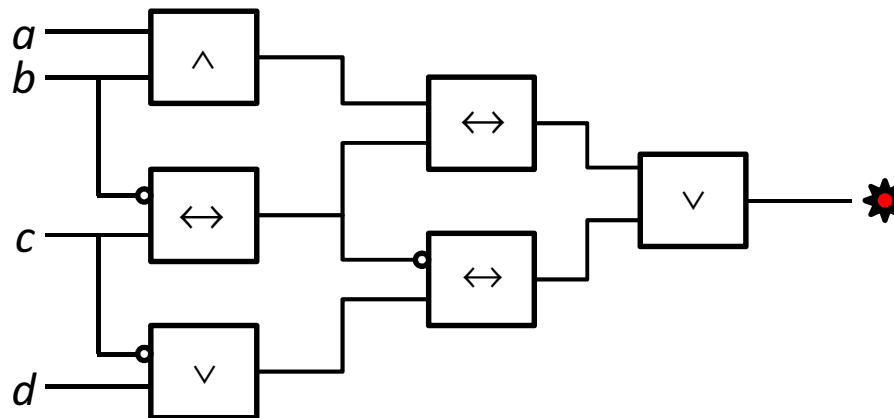
a)  $x \vee y \rightarrow \neg(x \vee z) \wedge (y \vee z)$

c)  $(a \vee b) \wedge c \rightarrow b$

b)  $x \vee y \rightarrow z \leftrightarrow (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$

d)  $(a \wedge b) \vee (\neg b \wedge \neg a) \rightarrow c \leftrightarrow b \vee a \rightarrow c$

2) Geben Sie zu der folgenden Schaltung die Erfüllungsmenge an.



# FORMALISIERUNG

## Variablendefinition:

Im ersten Schritt muss für jeden Zustand oder auch für jeden geschilderten Sachverhalt eine Variable definiert werden.

## Aussagendefinition:

Für jede existierende Aussage wird nun mittels der zuvor definierten Variablen eine aussagenlogische Formel generiert.

## Formalisierung:

Im letzten Schritt werden die erstellten Formeln miteinander verbunden. Handelt es sich um ein gleichzeitiges Auftreten der Zustände mittels Bijunktion, bei einer Folgerung (wenn ... dann) mit der Subjunktion.



# BEISPIEL FORMALISIERUNG

Andreas, Benedikt, Carolin und Dora sind auf eine Party eingeladen:

- ✓ Wenn Andreas geht, dann geht auch Benedikt.
- ✓ Carolin und Dora gehen nicht beide.
- ✓ Von Andreas und Dora gehen mindestens einer.
- ✓ Wenn Benedikt oder Dora geht, dann geht auch Carolin.

Es werden demzufolge die folgenden 4 Variablen definiert:

|    |          |
|----|----------|
| a: | Andreas  |
| b: | Benedikt |
| c: | Carolin  |
| d: | Dora     |

# BEISPIEL FORMALISIERUNG

Die Aussagen liefern die folgenden Aussagen:

- ✓ Wenn Andreas geht, dann geht auch Benedikt.  $\longrightarrow a \rightarrow b$
- ✓ Carolin und Dora gehen nicht beide.  $\longrightarrow \neg(c \wedge d)$
- ✓ Von Andreas und Dora gehen mindestens einer.  $\longrightarrow a \vee d$
- ✓ Wenn Benedikt oder Dora geht, dann geht auch Carolin.  $\longrightarrow (b \vee d) \rightarrow c$



# BEISPIEL FORMALISIERUNG

Da alle 4 Aussagen gleichzeitig erfüllt sein müssen, erhält man:

$$(a \rightarrow b) \wedge \neg(c \wedge d) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee d \rightarrow c)$$

Die dazugehörige Wahrheitstabelle liefert das folgende Ergebnis:

|      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a    | W | W | W | W | W | W | W | W | F | F | F | F | F | F | F | F |
| b    | W | W | W | W | F | F | F | F | W | W | W | W | F | F | F | F |
| c    | W | W | F | F | W | W | F | F | W | W | F | F | W | W | F | F |
| d    | W | F | W | F | W | F | W | F | W | F | W | F | W | F | W | F |
| ...  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| E[A] | F | W | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F |

Wie man erkennen kann, geht Andreas, Benedikt und Carolin auf die Party.

# AUFGABEN

1) Lösen Sie folgenden Kriminalfall, bei dem nach Ermittlungen bekannt ist:

- ✓ Falls *Hugo* und *Esmeralda* nicht beide beteiligt waren, dann ist auch *Fred* außer Verdacht.
- ✓ Ist *Esmeralda* schuldig oder *Fred* unschuldig, so kann auch *Hugo* nicht der Täter sein.
- ✓ Aber mindestens einer der drei war der Täter.

Formalisieren Sie dazu zuerst die gegebenen Sachverhalte und bestimmen anschließend mittels Wahrheitstabelle den Mörder.

# DEFINITIONEN

## Literal:

Jede unterschiedliche Aussagevariable als auch deren Negation bildet ein Literal.

## Konjunktionsterm $K_i$ :

Werden verschiedene Literale durch ein  $\wedge$  verbunden, so spricht man von einem

Konjunktionsterm:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \wedge x_n$$

Enthält dieser alle Variablen der Formel/ Aussage so handelt es sich um einen **Minterm**.

## Disjunktionsterm $D_i$ :

Werden verschiedene Literale durch ein  $\vee$  verbunden, so spricht man von einem

Disjunktionsterm:

$$x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_{n-1} \vee x_n$$

Enthält dieser alle Variablen der Formel/ Aussage so handelt es sich um einen **Maxterm**.

## Kanonisch:

Unter dem Begriff kanonisch versteht man vollbesetzt, d.h. ein kanonischer Term beinhaltet alle vorhandenen Variablen bzw. Literale.

Er besteht somit ausschließlich aus Min- bzw. Maxtermen.

# KNF – KONJUNKTIVE NORMALFORM

## Formel:

In der konjunktiven Normalform werden alle Terme mit einer Konjunktion  $\wedge$  verbunden, wobei in den Termen ausschließlich die Operatoren  $\vee$  und  $\neg$  vorkommen dürfen.

$$D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_{i-1} \wedge D_i$$

## Methode:

1. Im ersten Schritt bestimmen Sie die Erfüllungsmenge der umzuwandelnden Formel mittels einer Wahrheitstabelle.
2. Jedes  $F$  in der Lösung muss in der konjunktiven Normalform ein Klammersausdruck erzeugt werden.
3. In dem durch den 2. Schritt bestimmte Eingabemuster wird die Variable, die als Eingabewert ein  $W$  negiert.

# KNF - BEISPIEL

Wahrheitstabelle:  $\neg[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \rightarrow c$

|                                                                    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a                                                                  | W | W | W | W | F | F | F | F |
| b                                                                  | W | W | F | F | W | W | F | F |
| c                                                                  | W | F | W | F | W | F | W | F |
| $a \wedge b$                                                       | W | W | F | F | F | F | F | F |
| $\neg b \vee c$                                                    | W | F | W | W | W | F | W | W |
| $(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)$                     | W | F | F | F | F | W | F | F |
| $\neg[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)]$               | F | W | W | W | W | F | W | W |
| $\neg[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \rightarrow c$ | W | F | W | F | W | W | W | F |

Struktur:  $(Term_1) \wedge (Term_2) \wedge (Term_3)$

Kanonische KNF:  $(\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c)$

# DNF – DISJUNKTIVE NORMALFORM

## Formel:

In der disjunktiven Normalform werden alle Terme mit einer Konjunktion  $\vee$  verbunden, wobei in den Termen ausschließlich die Operatoren  $\wedge$  und  $\neg$  vorkommen dürfen.

$$K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_{i-1} \vee K_i$$

## Methode:

1. Im ersten Schritt bestimmen Sie die Erfüllungsmenge der umzuwandelnden Formel mittels einer Wahrheitstabelle.
2. Jedes  $W$  in der Lösung muss in der disjunktiven Normalform ein Klammerausdruck erzeugt werden.
3. In dem durch den 2. Schritt bestimmte Eingabemuster wird die Variable, die als Eingabewert ein  $F$  negiert.

# DNF - BEISPIEL

Wahrheitstabelle:  $[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \leftrightarrow c$

|                                                                        |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a                                                                      | W | W | W | W | F | F | F | F |
| b                                                                      | W | W | F | F | W | W | F | F |
| c                                                                      | W | F | W | F | W | F | W | F |
| $a \wedge b$                                                           | W | W | F | F | F | F | F | F |
| $\neg b \vee c$                                                        | W | F | W | W | W | F | W | W |
| $(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)$                         | W | F | F | F | F | W | F | F |
| $\neg[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \leftrightarrow c$ | W | W | F | W | F | F | F | W |

Struktur:  $(Term_1) \vee (Term_2) \vee (Term_3) \vee (Term_4)$

Kanonische DNF:  $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$

# ANMERKUNG DNF / KNF

## Kanonische Form:

Mittels der Wahrheitstabellen entsteht immer eine **kanonische** Struktur der DNF bzw. KNF, da die Eingabemuster stets komplett betrachtet werden müssen und dadurch ausschließlich **Min-** bzw. **Maxterme** entstehen.

## Vereinfachte Form:

Durch die Gesetze der Aussagenlogik kann die kanonische Form in die äquivalente vereinfachte bzw. verkürzte Struktur der DNF und KNF überführt werden, wobei die Min- bzw. Maxterme nach und nach eliminiert werden

## Disjunktive Normalform:

Zu jeder Formel, die keine **Kontradiktion** darstellt, existiert eine äquivalente (kanonische) disjunktive Normalform.

## Konjunktive Normalform:

Zu jeder Formel, die keine **Tautologie** darstellt, existiert eine äquivalente (kanonische) konjunktive Normalform.



# AUFGABEN

1) Bilden Sie für die folgende Formel die KNF sowie die DNF mittels Wahrheitstabelle.

$$\text{a) } [(\neg a \rightarrow b) \wedge ((a \wedge \neg c) \leftrightarrow b)]$$

$$\text{b) } (x \wedge z) \vee \neg(\neg(y \wedge \neg z) \wedge (\neg x \vee z))$$

2) Überführen Sie die gegebene kanonische konjunktive Normalform in die (nicht kanonische) disjunkte Normalform und benennen dabei jedes angewandte Gesetz.

$$\text{KNF: } [(a \vee b) \vee c] \wedge [(a \vee b) \vee \neg c] \wedge [(\neg a \vee b) \vee \neg c]$$

$$\text{DNF: } b \vee (a \wedge \neg c)$$