MATHEMATIK

29.10.2018

VOKABELN VOM 25.10.2018

Junktor
Operator
Gesetze (Arithmetik)
Gesetze (Mengenlehre)
Inklusion
transitiv
reflexiv
Symmetrie
Asymmetrie
Antiymmetrie
Disjunkte Mengen
Potenzmenge
Kartesisches Produkt

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

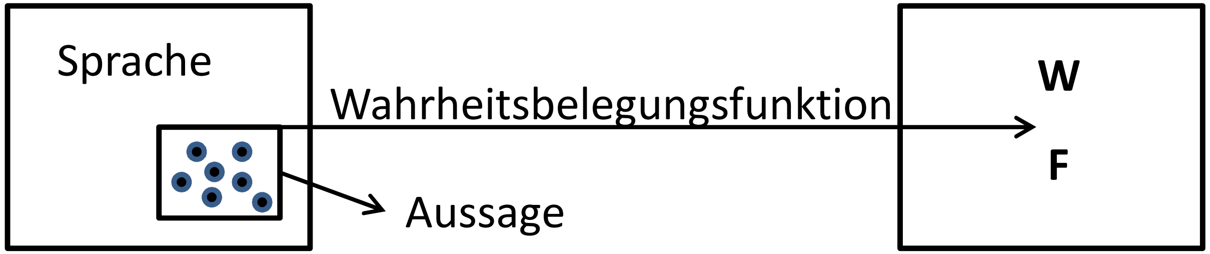
- ✓ Welche Mengen werden durch UND / ODER berechnet?
- ✓ Was bewirkt die Negation einer Menge?
- ✓ Welche Gesetze gibt es in der Mengenlehre und Arithmetik?
- ✓ Was versteht man unter dem Komplement?
- ✓ Wofür braucht man das „de Morgan – Gesetz“?
- ✓ Welche Zusammenhänge stellt das Idempotenzgesetz dar?
- ✓ Was versteht man unter einem neutralen Objekt?
- ✓ Welche Objekte sind in der Mengenlehre neutral?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was wird durch die Inklusion beschrieben?
- ✓ Anwendung von Zerlegung, Potenzmenge und kartesische Produkt.
- ✓ Was versteht man unter einer Aussage bzw. Aussageform?
- ✓ Welche Operatoren gibt es mit welcher Belegung?
- ✓ Was ist neutral in der Aussagenlogik?
- ✓ Was ist eine Wahrheitstabelle?
- ✓ Was beschreibt die Erfüllungsmenge einer Aussage?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUSSAGENLOGIK



<u>Aussage:</u>
Eine Aussage ist ein Satz der eindeutig als wahr **oder** falsch klassifiziert werden kann.

<u>Aussageform:</u>
Eine Aussageform A(x) ist ein Satz der mindestens von einem flexiblen Zustand bzw. einer Variablen abhängig ist und dadurch zu einer Aussage wird.

<u>Wahrheitsbelegungsfunktion:</u>
Es handelt sich um eine einstellige Funktion, die einer beliebigen Aussage den Wert „wahr“ oder „falsch“ zuordnet.

<u>*Beispiel*</u>:
Wahre Aussage: $40+2=42$
Falsche Aussage: $\sqrt{-42} \in \Re$
Aussageform: $x+42=0$

LOGISCHE OPERATOREN

PRIORITÄT

Negation: $\neg$

$$\neg(W) = F$$
$$\neg(F) = W$$

einstellig

$=$

Konjunktion: $\wedge$

$\wedge$	W	F
W	W	F
F	F	F

Disjunktion: $\vee$

$\vee$	W	F
W	W	W
F	W	F

Subjunktion: $\rightarrow$

$\rightarrow$	W	F
W	W	F
F	W	W

Bijunktion: $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$	W	F
W	W	F
F	F	W

zweistellig

WAHRHEITSTABELLEN

In einer Wahrheitstabelle werden alle möglichen Szenarien einer Schaltung abgebildet und durchgespielt.

Die positiven Ergebnisse werden als Erfüllungsmenge der Aussage *E[A]* bezeichnet.

Mit *n* Eingängen können 2^n verschiedene Eingabemuster erzeugt werden, wobei in den jeweiligen Zeilen stets $2^{n-Zeilennummer}$ mal wechselnd WAHR bzw. FALSCH steht. Die folgenden Zeilen werden analog oder durch Halbierung der Muster gebildet.

<u>Beispiel:</u> *3 Eingabevariablen = 8 verschiedene Eingabemuster*

a	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**F**	**F**	**F**
b	**W**	**W**	**F**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**
c	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**
...								
...								
E[A]								

AUFGABEN

Bestimmen Sie die Erfüllungsmenge der folgenden Aussagenverbindung.

1) $A(p,q,r) :\equiv p \rightarrow (q \vee r) \leftrightarrow \neg(q \vee r) \rightarrow \neg p$

2) $A(p,q,r) :\equiv \neg(p \rightarrow (q \vee r)) \vee \neg(q \wedge \neg r)$

3) $A(x,y,z) :\equiv (x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) \rightarrow z \leftrightarrow x \vee \neg y \rightarrow z$

4) $A(x,y,z) :\equiv x \wedge \left(y \vee \neg z\right) \rightarrow z \vee \neg\left(y \leftrightarrow x\right)$

GESETZE

Kommutativgesetz:	$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
Assoziativgesetz:	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
Distributivgesetz:	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
De Morgan:	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
Absorption:	$a \wedge (a \vee b) = a$	$a \vee (a \wedge b) = a$
Idempotenz:	$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$
Neutralität:	$a \wedge W = a$	$a \vee F = a$
Übergewicht:	$a \wedge F = F$	$a \vee W = W$

ZUSAMMENHÄNGE

Tertium non datur: $a \vee \neg a = W$

Widerspruch: $a \wedge \neg a = F$

Doppelte Negation: $\neg(\neg a) = a$

Subjunktion: $a \rightarrow b = (\neg a \vee b)$

Bijunktion: $a \leftrightarrow b = ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a))$

$a \leftrightarrow b = ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$

Kontraposition: $a \rightarrow b = (\neg b \rightarrow \neg a)$

BEGRIFFE

Präfix (lat. prae „*vor*“ und fix „*fest*“):
Ist in der deutschen Sprache eine sogenannte Vorsilbe und beschreibt in der Mathematik ein Objekt, dass sich vor einem Term o.ä. befindet.

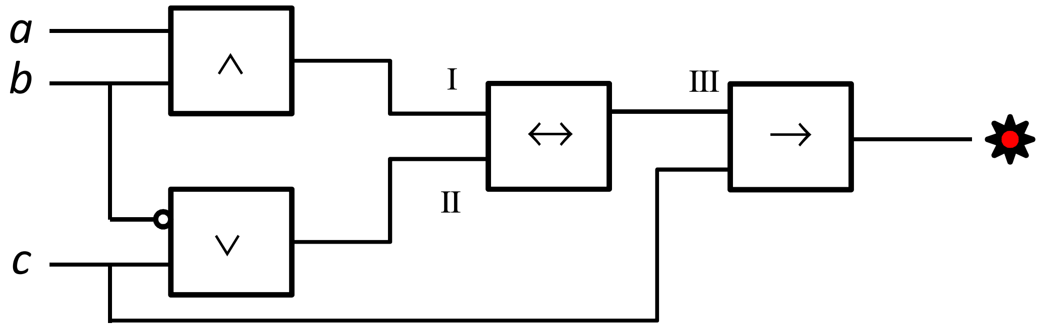
Ein Präfix vor einer Einheit gibt z.B. Auskunft darüber mit welcher Zehnerpotenz zu multiplizieren ist ($1\ GB = 1\ GigaByte = 1 \cdot 10^9\ Byte$)

Infix (lat. in „hinein“ und fix „*fest*“):
Ein Infix steht also innerhalb eines Ausdruck.
Dadurch existieren die Operatoren der Arithmetik in der Infix-Notation ($73 - 42$)

Postfix (lat. post „nach“ und fix „*fest*“):
Ein Postfix steht also stets hinter einem Term oder Ausdruck.
So ist z.B. das Gleichheitszeichen ein Postfix dar ($73 - \mathrm{x} = 42$)

BEISPIEL EINER SCHALTUNG

Schaltung:



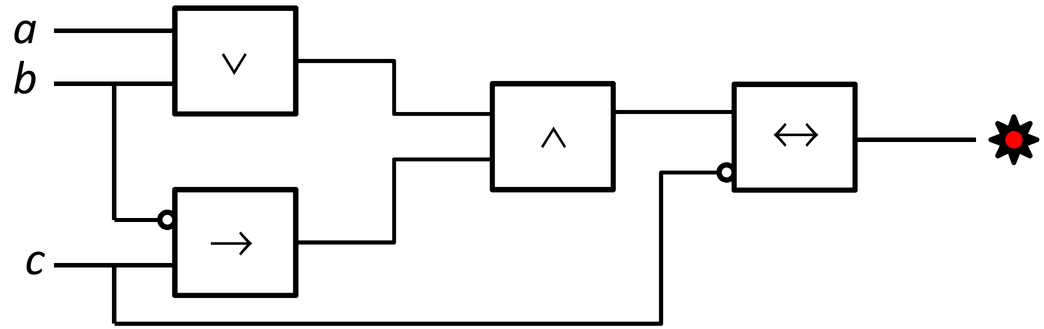
Wahrheitstabelle: $[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \rightarrow c$ $E[A] = Bool^3 \setminus \{(FWF)\}$

a	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**F**	**F**	**F**
b	**W**	**W**	**F**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**
c	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**
$a \wedge b$	W	W	F	F	F	F	F	F
$\neg b$	F	F	W	W	F	F	W	W
$\neg b \vee c$	W	F	W	W	W	F	W	W
$(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)$	W	F	F	F	F	W	F	F
$[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \rightarrow c$	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**W**	**W**

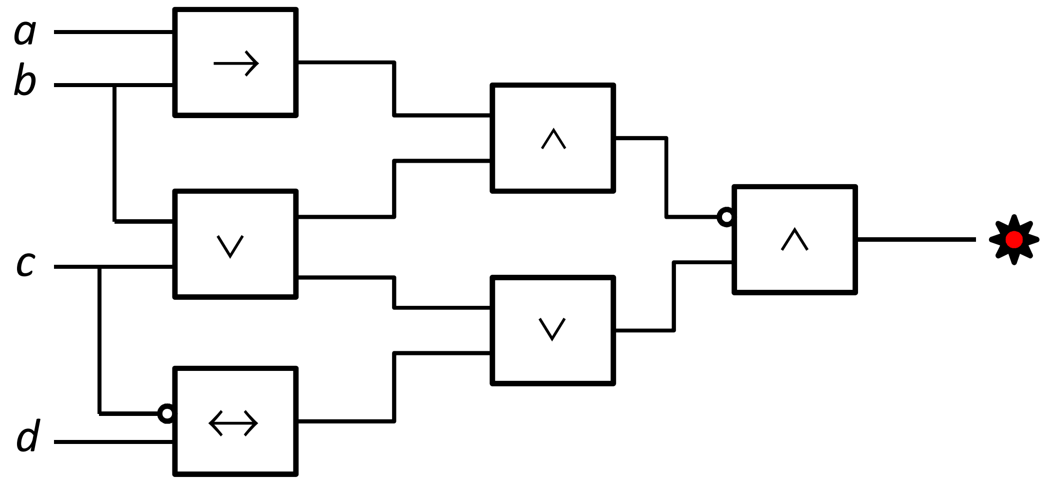
AUFGABEN

Geben Sie zu den folgenden Schaltungen die Erfüllungsmenge an.

1)



2)



FORMELKLASSEN

Je nach Art der Erfüllungsmenge kann der Ausdruck/ die Schaltung klassifiziert werden.

Tautologie (allgemeingültig):
Die Erfüllungsmenge der Aussage ist $Bool^n$ *, d.h. die Lampe brennt immer.*

Beispiel: $A(p,q) = p \wedge q \rightarrow p \Rightarrow E[A] = Bool^2$

Kontingenz (erfüllbar):
Die Anzahl der Erfüllungsmuster liegt in $[1;(n-1)]$*, d.h. die Lampe brennt manchmal.*

Beispiel: $A(a,b,c) = a \wedge (b \rightarrow \neg a \vee c) \leftrightarrow b \Rightarrow E[A] = \{(WWW);(FFW);(FFF)\}$

Kontradiktion (ungültig):
Die Erfüllungsmenge der Aussage ist $\{\ \}$ *, d.h. die Lampe brennt nie.*

Beispiel: $A(x,y) = (x \wedge \neg x) \wedge (y \vee \neg y \rightarrow x \leftrightarrow y) \Rightarrow E[A] = \{\ \}$

IMPLIKATION / ÄQUIVALENZ

Implikation (Folgerung):
Soll ein Ausdruck 2 die Folgerung aus einem Ausdruck 1 sein $(A_1 \rightarrow A_2)$,wird mittels Wahrheitstabelle die Subjunktion geprüft.
Stellt diese **Subjunktion** eine **Tautologie** dar, so handelt es sich um eine **Implikation**.

$$A = (A_1 \rightarrow A_2) : E[A] = Bool^n \quad \text{also} \quad A_1 \Rightarrow A_2$$

Äquivalenz (Gleichheit):
Soll ein Ausdruck 1 gleichwertig mit einem Ausdruck 2 sein $(A_1 \leftrightarrow A_2)$,wird mittels Wahrheitstabelle die Bijunktion geprüft.
Stellt diese **Bijunktion** eine **Tautologie** dar, so handelt es sich um eine **Äquivalenz**.

$$A = (A_1 \leftrightarrow A_2) : E[A] = Bool^n \quad \text{also} \quad A_1 \Leftrightarrow A_2$$

AUFGABEN

Prüfen Sie mittels Wahrheitstabelle, ob die Aussage $T_1(x, y, z) = x \wedge y \rightarrow z$ eine Folgerung aus $T_2(x, y, z) = x \wedge (y \rightarrow z)$ darstellt und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Prüfen Sie mittels Wahrheitstabelle, ob die beiden Aussagen $A_1(a,b,c) := a \wedge b \rightarrow c$ und $A_2(a,b,c) := a \wedge (b \rightarrow c)$ identisch sind.