MATHEMATIK

25.10.2018

VOKABELN VOM 22.10.2018

Menge
redundanzfrei
Intervalle
Tupel
Eigenschaftsdefinition
Venn'sches Diagramm
Vereinigung
Element
Schnitt
Modulo
Zahlenmengen

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Welche Objekte können in einer Menge vorhanden sein?
- ✓ Nennen Sie die 2 wichtigsten Eigenschaften von Mengen!
- ✓ Auf welche Arten können Sie eine Menge angeben (Wann)?
- ✓ Wie können Sie ein Intervall definieren?
- ✓ Was beschreibt die Mächtigkeit einer Menge?
- ✓ Wie funktioniert die Modulo-Operation?
- ✓ Wie sind die Zahlenmengen der Arithmetik definiert?
- ✓ Was sind komplexe Zahlen?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Anwendung und Aufgaben zur Mengenlehre I.
- ✓ Gesetze und Zusammenhänge der Operatoren.
- ✓ Definitionen und Eigenschaften der Teilmenge (Inklusion).
- ✓ Welche Symmetrieeigenschaften existieren?
- ✓ Wann und warum sprechen wir von einer Zerlegung?
- ✓ Bildung und Bedeutung der Potenzmenge.
- ✓ Definition / Gesetze des kartesischen Produkts.
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

Lösen Sie die folgenden Übungen, in dem Sie je einmal die Mengen via Aufzählung und einmal mittels Eigenschaften definieren.

1) Beschreiben Sie alle ganzen Zahlen zwischen -5 und 10, die durch drei aber nicht durch 4 teilbar sind.

2) Definieren Sie die natürlichen Zahlen größer gleich vier und kleiner 50, die durch 4 und durch 7 teilbar sind.

3) Gegeben sei die Menge M aller Studierenden an der Hochschule Fulda in Form der Matrikelnummer. Gesucht ist die Menge der Studierenden, wo die Quersumme der Matrikelnummer größer 15 ist.

JUNKTOREN

Junktoren entsprechen Verbindungen / Operatoren die beliebige Objekte miteinander verknüpfen können (Artithmetik: „+“, „-“, „*“, „:“).

UND $(A \cap B)$:
Das Objekt der Lösung gehört gleichzeitig zu den Menge A und B. (*Durchschnitt*)
Beispiel: Primzahl $\cap$ gerade, natürliche Zahl $= \{2\}$

ODER $(A \cup B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A oder B oder zu A und B. (*Vereinigung*)
Beispiel: ungerade Zahl $\cup$ gerade, natürliche Zahl = $\mathbb{N}$

NICHT $(A \setminus B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A aber nicht zu B. (*Differenz*)
Beispiel: natürliche Zahl $\setminus$ gerade, natürliche Zahl = ungerade Zahl

AUFGABEN

1) Gegeben sind die folgenden Mengen: $A=\{2;4;6;8;10\}$ $B=\{1;2;3\}$ $C=\{2;3;5;7;\}$
Berechnen Sie: $A\cup(B\cup C)$ $B\cap C\setminus A$ $(A\cap B)\cap(C\cap A)$ $A\setminus(B\cup C)$

2) Über die Anzahl *n* der Elemente in der Untermenge A, B und C einer Menge mit 200 Elementen ist folgendes bekannt:
$n(A)=70$ $n(B)=120$ $n(C)=90$ $n(A\cap B)=50$ $n(A\cap C)=30$ $n(B\cap C)=40$
$n(A\cap B\cap C)=20$
Wie groß ist die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen?
$n(A\cup B)$ $n(A\cup B\cup C)$ $n(\overline{A}\cap B\cap C)$ $n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$

3) Gegeben sind die Mengen der durch 5 teilbaren, ganzen Zahlen A und die Menge B mit {-10, -9, -8…8, 9, 10}. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Aussagen als Aufzählung und unter Verwendung der Eigenschaften bzgl. der ganzen Zahlenmenge:
a) $A\cap B$ b) $A\cup B$ c) A\B d) B\A

4) Gegeben sind die Menge $A=\{x\in\Re\mid 42\le x<50\}$ und die Menge B der durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen (kleiner 45). Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):
a) $A\cap B$ b) $A\cup B$ c) A\B d) B\A

GESETZE / ZUSAMMENHÄNGE

Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan:	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Komplement:	$\overline{A} \cap A = \{\ \}$	$\overline{A} \cup A = \Omega$
Absorption:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

<u>Zusammenhänge</u> zwischen $A; \{\ \}; \Omega$

$\cap$: $A \cap A = A$ $\quad A \cap \Omega = A \quad A \cap \{\ \} = \{\ \}$

$\cup$: $A \cup A = A$ $\quad A \cup \Omega = \Omega \quad A \cup \{\ \} = A$

Neutrales Objekt: $A \cap \Omega = A$ $\quad A \cup \{\ \} = A$

AUFGABEN

Beweisen Sie die folgenden Ausdrücke unter Benennung aller angewandten Gesetze

1) Das Absorptionsgesetz $A \cap (A \cup B) = A$

2) Das De Morgangesetz $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ mittels Komplement

3) Vereinfachen Sie die Robbinsgleichung: $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup \overline{B}}}$

TEILMENGE / INKLUSION

Sofern die Ausgangsmenge ein Teil oder komplett innerhalb einer weiteren Menge vorhanden ist, so spricht man von einer Teilmengenbeziehung bzw. von einer Inklusion.

Methodik:

$$\{a\} \subset Alphabet$$

1) Streichen der Mengenklammer bei der Ausgangsmenge

$$\Downarrow$$

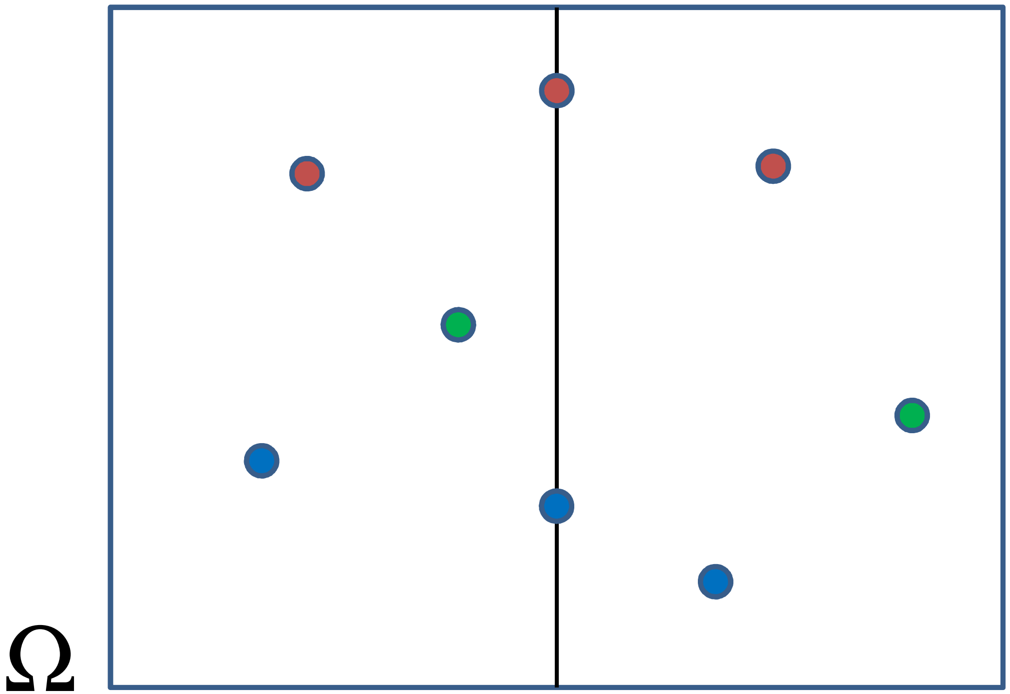
2) Jedes Objekt muss bzgl. Wert und Format in der 2. Menge auftauchen

$$a \in Alphabet$$

Eigenschaften:

- ✓Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge $\{\ \} \subset A$
- ✓**reflexiv:** Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst $A \subset A$
- ✓**transitiv:** logische Schlussfolgerungen sind zugelassen $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- ✓**antisymmentrie:** Beweisprinzip der Extensionalität $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN



✓**Symmetrie:**
Zu jedem Punkt gehört ein Spiegelpunkt.

✓**Asymmetrie:**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt.

✓**Antisymmetrie:**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt aber mindestens ein Punkt auf der Spiegelachse.

Sind mehrere Symmetrievarianten vorhanden, so kann keinerlei Aussage über das Symmetrieverhalten getroffen werden.

KLASSENEINTEILUNG / ZERLEGUNG

Man spricht von einer Klasseneinteilung, sofern sicher gestellt werden kann, dass jedem Objekt aus der definierten Welt einer Klasse (Untermenge) zugeordnet werden kann.

UND-Verknüpfung:
Die UND-Verbindung zwischen jeder Klasse muss jeweils die leer Menge als Lösung haben. Man spricht dann von disjunkten Mengen.

ODER-Verknüpfung:
Die ODER-Verbindung zwischen allen Klassen muss zu einer Menge führen, die alle Objekte der definierten Ausgangsmenge enthält.

Beispiel: *Alphabet*

UND-Verknüpfung: $Konsonat \cap Vokal = \{ \}$

ODER-Verknüpfung: $Konsonat \cup Vokal = Alphabet$

POTENZMENGE

Eine Potenzmenge ist eine Ansammlung von allen möglichen Teilmenge basierend auf einer beliebigen Menge A.

Da jedes Objekt der Ausgangsmenge zwei Möglichkeiten besitzt, nämlich zu der Teilmenge zu gehören oder nicht, besteht jede Potenzmenge aus 2^n Untermengen.

Die Teilmengen existieren von der Länge Null (leere Menge) bis zu der Länge *n* (Anzahl der Objekte in der Ausgangsmenge).

<u>Beispiel:</u> $A = \{a;b;c;d\}$

$$P(A) = \left\{\begin{array}{l} \{\ \}; \\ \{a\};\{b\};\{c\};\{d\}; \\ \{a;b\};\{a;c\};\{a;d\};\{b;c\};\{b;d\};\{c;d\}; \\ \{a;b;c\};\{a;b;d\};\{a;c;d\};\{b;c;d\}; \\ \{a;b;c;d\} \end{array}\right\} \quad 2^n = 2^4 = 16 \quad \text{Untermengen}$$

KARTESISCHES PRODUKT

Das kartesische Produkt wird mittels Kreuzprodukt aus beliebigen Mengen gebildet, wobei jedes Objekt der linken Menge mit jedem weitern Objekt übrigen Mengen kombiniert wird.

Als Ergebnis entsteht ein n-dimensionales Tupel $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$.

Die entstehende geordnete Punktmenge ist **nicht kommutativ**.

Der Euklidische Vektorraum lässt sich als kartesische Produkt somit wie folgt darstellen: $\Re^3 = \Re x \Re x \Re = (x_1, x_2, x_3)$

Beispiel: $A = \{a; b; c\}$ $B = \{1;2;\}$

$$AxB = \{(a,1); (a,2); (b,1); (b,2); (c,1); (c,2);\}$$

$$BxA = \{(1,a); (1,b); (1,c); (2,a); (2,b); (2,c);\}$$

AUFGABEN

1) Gegeben sei die Menge $A = \{42; \{x; y\}, \{\ \}\}$.
   Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

   $a) x \in A$ $\quad b) \{x; y\} \subset A$ $\quad c) \{42\} \subset A$ $\quad d) \{42\} \in A$ $\quad e) 42 \in A$

   $f) 42 \subset A$ $\quad g) \{\ \} \in A$ $\quad h) \{\ \} \subset A$ $\quad i) \{\{\ \}\} \subset A$ $\quad j) \{4\} \subset A$

2) Welche der folgenden Aussagen über eine Potenzmenge $P(A)$ und einer Menge *A* sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

   $a) A \in P(A)$ $\quad b) A \subset P(A)$ $\quad c) \{\ \} \in P(A)$ $\quad d) \{\ \} \subset P(A)$

   $e) \{A\} \in P(A)$ $\quad f) \{A\} \subset P(A)$ $\quad g) \{\{\ \}\} \subset P(A)$ $\quad h) \{\{\ \}\} \in P(A)$

3) Bilden Sie die Potenzmenge basierend auf der Menge $A = \{\otimes; \nabla; \infty; \pi\}$.

AUFGABEN

4) Gegeben sei die Menge $A = \{\{\ \}; a; \{1;3\}; 5; \{5\}\}$.
   Welche der folgenden Untermengen sind Zerlegungen von *A* (Begründung)?

   $a) \{\{a\}; \{1;3\}; \{\{\ \}\}; \{5\}\}$ $b) \{\{a\}; \{1;3\}; \{\ \}; \{5; \{5\}\}\}$ $c) \{\{a; \{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{5; \{5\}\}\}$

   $d) \{\{a\}; \{\{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{\{5\}\}; \{5\}\}$ $e) \{\{5; a; \{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{5\}\}$

5) Gegeben sei die Menge $A = \{\alpha; \beta; \varepsilon\}$, $B = \{I; V\}$ und die Menge $C = \{x; y\}$.
   a) Bilden Sie das kartesische Produkt AxBxC.
   b) Bilden Sie das Kreuzprodukt aus AxB sowie aus CxA (grafische Darstellung).

6) Ermitteln Sie die gefragten Lösungsmengen aufgrund des gegebenen Venn'schen Diagramms.

   $a) A \cup C$ $d) (A \cup B) \setminus C$

   $b) A \setminus (B \cup C)$ $e) (A \cap B) \setminus (A \cup C)$

   $c) (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $f) (C \cup A) \cap (B \cup C)$