Vokabel	Bedeutung
Reihe	Unter einer Reihe versteht man das **Produkt** bzw. die **Summe** über einer Folge, d.h. die **Elemente** der Zahlenfolge werden via Plus/ Mal **aneinandergereiht**. Somit gibt es zu jeder eingesetzten Zahl **zwei Ausgabewerte**, die Ausprädung **an** dieser Stelle und den Reihenwert **bis** zu dieser Stelle.
Folgenglied	gibt die **Ausprägung** einer Zahlenfolge an einer bestimmten Position wieder und berechnet sich entweder **explizit** oder **rekursiv**.
Startwert	beschreibt die Zahl, **ab** der eine Reihe **beginnt**. Dieser Wert steht direkt **unterhalb** von dem Reihensymbol und entspricht der Zahl, die beim **Induktionsanfang** geprüft werden muss.
Endwert	beschreibt die Zahl, **bis wohin** die Reihe **läuft**. Dieser Wert steht direkt **oberhalb** von dem Reihensymbol und entspricht der Zahl, die beim **Induktionsschluss** geprüft werden muss.
Summen-/ Produktformel	Um direkt das Ergebnis einer Reihe bestimmen zu können, ohne die einzelnen Folgeglieder addieren/ multiplizieren zu müssen, entwickelt bzw. beweist man einen **Term**, der dies **Ergebnis** liefert. *Summe aller ungeraden Zahlen:* $\sum(2k-1) = n^2$
Induktionsschluss	Hier muss bewiesen werden, dass die Summen-/ Produktformel auch bis zum **(n+1)-ten Element** gültig ist. Man zeigt, dass die Summe bis zum n-ten Element plus das Folgeglied an der Stelle (n+1) identisch mit der Summenformel bis zum (n+1)-ten Element ist. *Summe*: $S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$ *Produkt*: $P_n \cdot a_{n+1} = P_{n+1}$

Ungerade Zahlenreihe:

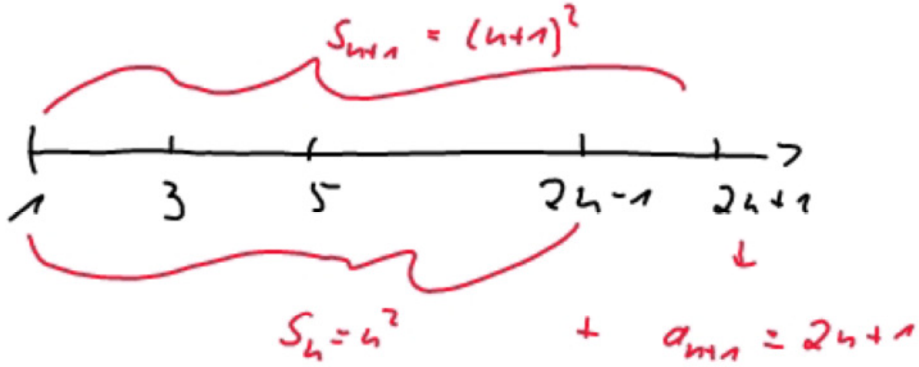
$$\sum_{k=1}^{n}: \quad 1 + \underset{\substack{\uparrow \\ k=2}}{3} + 5 + 7 + \ldots + (\underbrace{2n}_{k=n} - 1) \; \Big(+ [2\cdot(n+1)+1] + [2\cdot(n+2)+1] \Big).$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{1} (2\cdot k \cdot 1) = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} (2k-1) = 1+3 = 4 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{3} (2k-1) = 1+3+5 = 9 \end{array}\right\} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(2k-1)}_{a_k} = n^2 \longrightarrow S_n$$

<u>Induktionsanfang</u> $\quad n=1 \quad \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$ ✓



$$(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$$
$$n^2+2n+1 = n^2+2n+1$$
$$0 = 0 \quad ✓$$

1) $\sum_{k=0}^{n} 5^k = \frac{5^{n+1}-1}{4}$

$a_k = 5^k \rightarrow a_{n+1} = \underline{\underline{5^{n+1}}}$

$S_n = \frac{5^{n+1}-1}{4} \rightarrow S_{n+1} = \frac{5^{(n+1)+1}-1}{4} = \underline{\underline{\frac{5^{n+2}-1}{4}}}$

$n=0$ $\quad a_0 = S_0 \quad 5^0 = 1 = \frac{5^{0+1}-1}{4} = 4/4$ ✓

Prämisse: ...

$n+1$: $\quad S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$

$\frac{5^{n+1}-1}{4} + \underline{\underline{5^{n+1}}} = \underline{\underline{\frac{5^{n+2}-1}{4}}} \quad | \cdot 4$

$5^{n+1} - 1 + 4 \cdot 5^{n+1} = 5^{n+2} - 1 \quad | +1$

$\rightarrow \underbrace{5^{n+1} + 4 \cdot 5^{n+1}}_{} = 5^{n+2}$

$5 \cdot 5^{n+1} = 5^{n+2}$

$5^{1+(n+1)} = 5^{n+2}$

$0 = 0$ ✓

2) $$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{k^3}_{a_k} = \underbrace{\left[\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right]^2}_{S_n}$$

$n=1 \qquad a_1 = S_1 \qquad 1^3 = 1 = \left(\frac{2\cdot 1}{2}\right)^2 = 1^2$ ✓

$n+1 \qquad S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$

$$\frac{(n+1)^2\cdot n^2}{4} + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}\right]^2 \quad |\cdot 4$$

$$\underline{(n+1)}^2\cdot n^2 + 4\cdot\underline{(n+1)}^3 = (n+2)^2\cdot\underline{(n+1)}^2$$

$$(n+1)^2\cdot\left[n^2 + 4\cdot(n+1)\right] = (n+1)^2\cdot(n+2)^2 \quad |:(n+1)^2 <> 0$$

$$n^2+4n+4 = (n+2)^2 = n^2+4n+4$$

$$0=0$$ ✓

S173 a) $a_k = k \cdot (k+1)^2$ $\quad a_{n+1} = (n+1) \cdot (n+2)^2$

$$S_n = \tfrac{1}{12}\, n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

$$S_{n+1} = \tfrac{1}{12}\,(n+1)(n+2)(n+3)(3n+8)$$

<u>n+1</u> $\quad S_n + a_{n+1} = S_{n+1} \qquad |:(n+1) \quad |:(n+2)$

$$\tfrac{1}{12}\, n\,(n+1)(n+2)(3n+5) + (n+1)(n+2)^2 = \tfrac{1}{12}\,(n+1)(n+2)(n+3)(3n+8)$$

$$\tfrac{1}{12}\, n\,(3n+5) + (n+2) = \tfrac{1}{12}\,(n+3)(3n+8) \quad |\cdot 12$$

$$n \cdot (3n+5) + 12 \cdot (n+2) = (n+3)(3n+8)$$

$$3n^2 + 5n + 12n + 24 = 3n^2 + 9n + 8n + 24$$

$$3n^2 + 17n + 24 = 3n^2 + 17n + 24$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$