

| Vokabel | Bedeutung |
|----------------------------|--|
| vollständige Induktion | Es handelt sich um ein positives Beweisverfahren , das Zusammenhänge für natürliche Zahlen darstellt und beweist. Im Wesentlichen beruht es darauf, dass man die Gültigkeit der Formel für das erste Element zeigt und anschließend eine Element weiter geht als man müsste (n+1). Am Ende steht der vollständige Rückschluss . |
| Induktionsanfang | Hier wird das Verhalten des Zusammenhangs für den Startwert überprüft. Sollte hier schon ein Widerspruch auftreten, dann erfolgt der Ausstieg und die zu überprüfende Formel ist falsch. |
| Prämisse Induktionsschluss | Am Schluss muss noch die Stelle (n+1) geprüft / eingesetzt werden. Dazu muss in der Prämisse die Gültigkeit der zu testenden Formel für alle $n \in Menge$ vorausgesetzt werden. Während des Beweises muss dann immer einer der Ausdrücke der Prämisse gefunden und ersetzt werden |
| Beweis von Ungleichungen | Soll die Gültigkeit von Ungleichungen $a_n > b_n$ bewiesen werden, so ignoriert man das Ungleichheitszeichen und ersetzt im Induktionsschluss als ob ein Gleichheitszeichen stehen würde. Ziel ist es stets eine allgemeingültige Aussage zu bekommen. |
| Beweis von Teilbarkeit | Um die Teilbarkeit eines Ausdrucks zu untersuchen wird dieser immer als Teiler mal ganze Zahl dargestellt ($a_n = \gamma \cdot k, k \in \mathbb{Z}, \gamma = \text{Teiler}$) Nach dem Ersetzen im Induktionsschluss beruht der Beweis im Wesentlichen darauf, dass man zeigt, dass die Welt der ganzen Zahlen nicht verlassen wird. |

S 134 Nr 4 $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x, n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}$

Bernoulli - Ungleichung

$n=0$ $(1+x)^0 \geq 1+0 \cdot x$
 $1 \geq 1$ ✓

Prämisse: Der Ausdruck $\boxed{(1+x)^n \geq 1+n \cdot x}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gültig

$n+1$ $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1) \cdot x$

$$\begin{aligned} \underline{(1+x)^n} \cdot (1+x)^1 &\geq \underline{1+n \cdot x} + x \\ (1+n \cdot x) \cdot (1+x) &\geq 1+n \cdot x + x \\ 1+n \cdot x + x + n \cdot x^2 &\geq 1+n \cdot x + x \quad (-1-n \cdot x - x) \\ n \cdot x^2 &\geq 0 \quad \checkmark \quad (\geq 0) \cdot (\underbrace{\quad}_{\geq 0})^2 \end{aligned}$$

1) $9^n + 7$; $n \geq 0$ ist durch 8 teilbar

$$9^n + 7 = k \cdot 8 \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$n=0 \quad 9^0 + 7 = 1 + 7 = 8 = k \cdot 8 \quad k=1 \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

Prämisse: $9^n + 7$ ist durch 8 teilbar

$$(n+1) \quad 9^{n+1} + 7 = 9 \cdot 9^n + 7 = 8 \cdot k$$

$$9^n + 7 + 8 \cdot 9^n = 8 \cdot k$$

$$8 \cdot k + 8 \cdot 9^n = 8 \cdot k$$

$$8 \cdot (k + 9^n) = 8 \cdot k$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \uparrow \\ \mathbb{Z} + \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

$$2) \quad 5^n + 7 = 4 \cdot k ; k \in \mathbb{Z} ; n \in \mathbb{N} \quad \text{with } 2x+3 - 5x+2 = -3x+5$$

$$n=0 \quad 5^0 + 7 = 1 + 7 = 8 = 4 \cdot k \Rightarrow k=2 \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

Prämisse $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar

$$(n+1) \quad 5^{n+1} + 7 = 5 \cdot 5^n + 7 = 4 \cdot k$$

$$\begin{array}{r} 5^n + 7 + 4 \cdot 5^n \\ x + 7 + 4x \\ \hline 4 \cdot k + 4 \cdot 5^n \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 5^n + 7 + 4 \cdot 5^n \\ x + 7 + 4x \\ \hline 4 \cdot k + 4 \cdot 5^n \end{array}} \right\} 4 \cdot k$$

$$4 \cdot (k + 5^n)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{Z} + \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

$$7) \quad n^n \geq n! \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n=0 \quad 0^0 \geq 0! \\ 1 \geq 1 \quad \checkmark$$

Prämisse : $n^n \geq n!$

$$(n+1): \quad (n+1)^{n+1} \geq (n+1)! \\ (n+1)^n \cdot (n+1) \geq (n+1) \cdot n!$$

$$(n+1)^n \cdot (n+1) \geq (n+1) \cdot n^n \quad \begin{array}{l} \div (n+1) \Leftrightarrow \sigma \\ \sqrt{\quad} \\ 1-1 \\ \checkmark \end{array}$$
$$(n+1)^n \geq n^n$$
$$n+1 \geq n$$
$$1 \geq 0$$