MATHEMATIK

08.02.2018

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie bestimmen Sie die Stammfunktion einer höheren Funktion?
- ✓ Was ist eine Differenzfunktion?
- ✓ Wie können Sie die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen?
- ✓ Warum spielt die Lage dabei keine Rolle?
- ✓ Wann sprechen Sie von einem unendliche Integral?
- ✓ Wie berechnet man aufgrund eines Flächeninhalts die Grenzen?
- ✓ Was machen Sie, wenn eine der Grenzen die Unendlichkeit ist?
- ✓ Welche Arten der Funktion kennen Sie?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben und Anwendungen der Integralrechnung.
- ✓ Was geschieht, wenn die Funktion auf die Ableitung trifft?
- ✓ Wie nennt man die Produktregel der Integration?
- ✓ Welche Arten der partiellen Integration existieren?
- ✓ Wozu benötigt man die Ableitungseigenschaften von Funktionen?
- ✓ Aus welchen wesentlichen Schritten besteht die Aufleitung?
- ✓ Welche Methodik sollte man beim Integrieren anwenden?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Berechnen Sie Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse (Nullstellen).

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$

2) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die zugehörige Stammfunktion.

a) $h(x) = 7x - 2 \cdot e^{3x-4}$ b) $k(x) = 4 \cdot (5 - 3x)^3$

3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} \wedge g(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{5x - 6} \wedge g(x) = x$

INTERGALE VII

Abhängig von den zugehörigen **Integrandfunktionen** wird im Bereich der Flächeninhaltsberechnung zwischen **unendlichen** und **endlichen** Integralen unterschieden.
Um die entsprechende Eigenschaft **klassifizieren** zu können, wird zuerst die Stammfunktion an der **gegebenen Stelle** berechnet und anschließend mittels **Grenzwertbetrachtung** gegen Unendlich oder Konstant der Wert des Integrals bestimmt.

✓ <u>unendliche Integrale</u>:

Dem Integral kann **kein exakter Wert** zugewiesen werden bzw. strebt der gesuchte Flächeninhalt gegen unendlich.
Dies geschieht z.B. an den senkrechten Asymtoten (Definitionslücken) einer Funktion.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} \Rightarrow \lim_{x \to 1}\left(f(x)\right) = \infty$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \left| -\frac{1}{2 \cdot (x-1)^2} \right|_0^1 = \left| \lim_{x \to 1}\left(-\frac{1}{2 \cdot (x-1)^2} + \frac{1}{2} \right) \right| = \left| \left[-\infty + \frac{1}{2} \right] \right| = \left| -\infty \right| = \infty$$

Man erkennt, dass durch die Grenzwertbetrachtung unendlich als Resultat herauskommt, was keinem exakten Flächeninhalt entsprechen kann.

INTERGALE VIII

✓ <u>Endliche Integrale</u>:

Es handelt sich um einen **festen Wert**, der dem Integral zugewiesen werden kann.
Dieser liegt z.B. dann vor, wenn sich die Fläche innerhalb **zweier Nullstellen** befindet oder auch bei der Bestimmung des Inhalts **zwischen zwei** gegebenen Funktionen.

Wird allerdings der Flächeninhalt bis ins **Unendliche** gesucht, so muss der Grenzwert der **Integrandfunktion** (im Undendlichen) **Null** sein.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right) = 0$$

$$\int_2^\infty f(x)dx = \left|-\frac{1}{x}\right|_2^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right) = \left[0^- + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

Auch hier wird mittels **Grenzwertbetrachtung** der Stammfunktion die Fläche gesucht.
Da die Stammfunktion allerdings im Unendlichen Null ist, fällt sie ganz weg und man erhält einen **konstanten Wert** für die gesuchte Fläche.

FUNKTIONSARTEN

Für die Berechnung komplizierter Stammfunktionen ist es wichtig, die Arten der möglichen Integrandfunktion näher zu beschreiben.
Die Unterscheidung bezieht sich im Wesentlichen auf die Art der Ableitungen:

- ✓ Reduzierende Funktion:

  Eine solche Funktion liegt dann vor, wenn sich beim Ableiten eines Ausdrucks der Exponent reduziert und letztlich zu einer Konstanten wird (Polynom vom Grade n).

  $$f(x) = 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 \Rightarrow f''(x) = 12x \Rightarrow f'''(x) = 12$$

  Nach n Ableitungen verschwindet die Funktion komplett (wird Null).

- ✓ Alternierende Funktion:

  Eine solche Funktion liegt dann vor, wenn sich beim Ableiten eines Ausdrucks die entstehende Funktionsklasse nicht verändert (Trigonometrie, Exponential).

  $$f(x) = e^{2x+1} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^{2x+1} \Rightarrow f''(x) = 4 \cdot e^{2x+1} \Rightarrow f'''(x) = 8 \cdot e^{2x+1} \Rightarrow \ldots$$

  Nach n Ableitungen ist die Funktion immer noch die gleiche (alternierend).

AUFGABEN

1) Geben Sie den Wert des folgenden Integrals an und klassifizieren Sie diesen.

a) $\int_{1}^{\infty} \left(\frac{2}{x^5} \right) dx$ b) $\int_{0}^{1} \left(\frac{2}{x} \right) dx$

2) Bestimmen die Grenze des Integrals, so dass die gegebene Fläche erreicht wird.

$$\int_{\alpha}^{\infty} \left(\frac{1}{(2x-2)^2} \right) dx = \frac{1}{16}$$

3) Bestimmen Sie die ersten 5 Ableitungen der Funktion und klassifizieren Sie diese.

a) $f(x) = 0{,}5 \cdot x^4 - 3x^2$

b) $g(x) = 2\sin(2x-4)$

c) $h(x) = 3x^2 - \frac{2e^2}{e^x}$

INTEGRATIONSVERFAHREN

Trifft hinter dem Integralzeichen eine **Funktion** auf deren **Ableitung**, kann dies entweder in Form eines **Produktes** oder als **Quotient** geschehen.
Aufgrund der Kettenregeldefinition ergeben sich dadurch folgende Zusammenhänge:

Produkt:

$$\boxed{\int \big(f(x)\cdot f'(x)\big)dx = \frac{1}{2}\cdot [f(x)]^2 + C}$$

$$\left[\frac{1}{2}\cdot [f(x)]^2 + C\right]' = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot [f(x)]^{2-1}\cdot f'(x) + 0 = f(x)\cdot f'(x)$$ *Beweis*

Quotient:

$$\boxed{\int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx = \ln\big(f(x)\big) + C}$$

$$\left[\ln\big(f(x)\big) + C\right]' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) + 0 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ *Beweis*

PARTIELLE INTEGRATION I

Besteht die **Integrandfunktion** aus einem **Produkt** von zwei unterschiedlichen Funktionen, so muss **partiell integriert** werden.
Das anzuwendende Verfahren ergibt sich aus der **bekannten Produktregel** der Ableitungen:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x) = [f(x)\cdot g(x)]' - g'(x)\cdot f(x)$$

Durch die Bildung der „Aufleitung“ auf beiden Seiten ergibt sich automatisch die Produktregel der Integration sprich die **partielle Integration**:

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g'(x)\cdot f(x)}$$

<u>Fall 1:</u>
Trifft eine **reduzierende** auf eine **alternierende** Funktion, sollte g(x) als reduzierend und f'(x) als alternierende Funktion gewählt werden, da nach n Integrationen die reduzierende Funktion verschwindet.

<u>Fall 2:</u>
Sind die beiden Faktoren des Produkt alternierende Funktionen, so muss max. zweimal partiell integriert werden, da nach dem 2. Schritt automatisch das Ausgangsintegral entsteht.

PARTIELLE INTEGRATION II

Beispiel zu Fall 1: $\int \left(x^2 \cdot e^{2x}\right) dx = F_1(x) + C$ *g(x)=reduzierend; f(x)=alternierend*

1. Schritt:

$$\left\{\begin{array}{lll} f'(x) = e^{2x} & \Rightarrow & f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \\ g(x) = x^2 & \Rightarrow & g'(x) = 2 \cdot x \end{array}\right\} F_1(x) = \boxed{\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x^2} - \boxed{\int \left(\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot 2 \cdot x\right) dx}$$

$$\int \left(e^{2x} \cdot x\right) dx = F_2(x) + C$$

2. Schritt:

$$\left\{\begin{array}{lll} f'(x) = e^{2x} & \Rightarrow & f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \\ g(x) = x & \Rightarrow & g'(x) = 1 \end{array}\right\} F_2(x) = \boxed{\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x} - \boxed{\int \left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x}\right) dx}$$

$$\Rightarrow \int \left(x^2 \cdot e^{2x}\right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x^2 - \left(\frac{1}{2} e^{2x} \cdot x - \frac{1}{4} e^{2x}\right) + C = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$$

PARTIELLE INTEGRATION III

<u>Beispiel zu Fall 2:</u> $\int \left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = F_1(x)+C$ *g(x)=alternierend; f(x)=alternierend*

1. Schritt: $\left\{\begin{matrix} f'(x)=e^{2x} & \Rightarrow & f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x} \\ g(x)=\sin(x) & \Rightarrow & g'(x)=\cos(x)\end{matrix}\right\} F_1(x)=\boxed{\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin(x)}-\boxed{\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\cos(x)\right)dx}$

$$\int\left(e^{2x}\cdot\cos(x)\right)dx = F_2(x)+C$$

2. Schritt: $\left\{\begin{matrix} f'(x)=e^{2x} & \Rightarrow & f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x} \\ g(x)=\cos(x) & \Rightarrow & g'(x)=-\sin(x)\end{matrix}\right\} F_2(x)=\boxed{\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\cos(x)}-\boxed{\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot(-\sin(x))\right)dx}$

$$\Rightarrow \int\left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\cos(x)+\frac{1}{2}\int\left(e^{2x}\cdot\sin(x)\right)dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \int\underline{\left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right)-\frac{1}{4}\int\underline{\left(e^{2x}\cdot\sin(x)\right)}dx$$

$$\frac{5}{4}\int\left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right) \Leftrightarrow \int\left(\sin(x)\cdot e^{2x}\right)dx = \frac{2}{5}e^{2x}\cdot\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right)$$

METHODIK DER INTEGRATION

Aufgrund der Vielzahl der Möglichkeiten eine Stammfunktion zu entwickeln, sollte folgende Vorgehensmethodik angewandt werden:

1. Einfache Aufleitung: $$\boxed{f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}}$$

---

2. Produkt $\left(f(x) \cdot f'(x)\right)$: $$\boxed{\int \left(f(x) \cdot f'(x)\right) dx = \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^2 + C}$$

---

3. Quotient $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$: $$\boxed{\int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx = \ln\left(f(x)\right) + C}$$

---

4. Alternierend → reduzierend / alternierend : $$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int g'(x) \cdot f(x)}$$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie zu den gegebenen Funktionen deren Stammfunktion.

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ b) $g(x) = -\tan(x)$ c) $h(x) = \dfrac{8x^3 - 16x}{(2x^2 - 4)^2}$

2) Bestimmen die folgenden beiden unbestimmten Integrale.

a) $\int \left(\frac{1}{2} x^2 \cdot \cos(2x) \right) dx$

b) $\int \left(\cos(2x) \cdot e^{3-2x} \right) dx$