MATHEMATIK

01.02.2018

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann muss man die Kettenregel anwenden (Methodik)?
- ✓ Welche 4 Klassen von höheren Funktionen gibt es ?
- ✓ Was wird durch die Hauptbedingung beschrieben?
- ✓ Wie erhält man die Zielfunktion?
- ✓ Wie viele Bedingungen benötigen Sie bei einer Funktion vom Grade 5?
- ✓ Was wissen Sie, wenn der Punkt (a/b) ein Sattelpunkt ist?
- ✓ Welche Verfahren kann man zur Lösung anwenden?
- ✓ Wie kann man aufgrund eines Graphen die Funktion bestimmen?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben und Anwendungen der Ableitungen.
- ✓ Wie ist ein allgemeines, bestimmtes Integral aufgebaut?
- ✓ Was ist ein unbestimmtes Integral?
- ✓ Worauf ist bei der Integration zu achten?
- ✓ Wie bildet man die Stammfunktion eines Potenzausdrucks?
- ✓ Was macht man bzgl. der Stammfunktion bei höheren Funktionen?
- ✓ Wie berechnet man den Flächeninhalt zwischen 2 Funktionen?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN I

1) Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und fertigen Sie eine Skizze an.

a) $$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(6 - 4{,}5 \cdot \cos\left(\frac{1}{3}x - 4{,}5\pi\right)\right) - 4$$

b) $$g(x) = -3 \cdot \cos^4(4x + \frac{3}{2}\pi) - 2$$

2) Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen die 1. Ableitung und geben zusätzlich den zugehörigen Definitionsbereich an.

a) $$h(x) = \ln\left(x^2 - 9\right) + \frac{3}{x}$$

b) $$k(x) = \frac{42}{\sqrt[4]{x^2 - 8x + 12}}$$

c) $$l(x) = 2 \cdot e^{\sqrt{3x-2} + \sin(\sqrt{2-x})}$$

AUFGABEN II

1) Eine ganzrationale Funktion vom Grade 4 verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse und hat bei x=2 eine Nullstelle. Der Graph hat in $P = (1/-6)$ eine Tangente, die senkrecht zur der Geraden $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ steht.

2) Peter will im Garten ein Hochbeet in Form eines Stadions (Rechteck mit zwei Halbkreisen) bauen. Dafür steht ihm ein Zaun mit der Länge 614 Metern zur Verfügung.
Welche Maße muss er wählen, damit er eine maximale Fläche erhält?

INTEGRALRECHNUNG I

Mittels der Integralrechnung wird z.B. eine **Fläche** zwischen einer **Funktion** und der **X-Achse** in gegebenen Grenzen bestimmt.
Eine Funktion, die durch Einsetzen der Grenzen den gesuchten Inhalt liefert nennt man **Stammfunktion**, für die folgender Zusammenhang gilt:

$$\boxed{[F(x)]' = f(x)}$$

Stammfunktion Integrandfunktion

Die Ableitung der Stammfunktion ist die Integrandfunktion.

✓<u>Unbestimmte Integral</u>: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$

Es handelt sich um ein Integral, in dem die **Grenzen nicht gegeben** sind.
Es ist darauf zu achten, dass bei diesem Intergaltyp die Stammfunktion durch eine **Konstante** ergänzt werden muss.

✓<u>Bestimmtes Integral</u>: $\boxed{\int_b^a f(x)dx = \left|F(x)\right|_b^a = F(a) - F(b)}$

Es handelt sich um ein Integral, in dem die **Grenzen gegeben** sind.
Die gesuchte Fläche berechnet sich durch die **Differenz** der Stammfunktion an der **oberen** und **unteren** Grenze.

INTEGRALRECHNUNG II

Die Stammfunktion einer Funktion wird quais mittels **Aufleitung** gebildet. Im Fall einer einfachen **Potenzfunktion** ergibt sich:

$$\boxed{f(x) = a \cdot x^n \Leftrightarrow F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}}$$

Beweis: $[F(x)]' = f(x)$

$$\left[\frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}\right]' = \frac{a}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^{(n+1)-1} = a \cdot x^n = f(x)$$

Regeln/ Eigenschaften der Integration:

Da es **keine negativen Flächen** gibt, muss auch der Wert einer Integrals stets **positiv** sein.
Man berechnet im 1. Schritt das Integral, ist das Ergebnis negativ, so setzt man bis zum ersten Rechenschritt Betragsstriche.

Man darf **niemals** über eine **Nullstelle hinweg** integrieren, da dadurch die Flächendifferenz entstehen würde. *Es wird also im 1.Schritt auf Nullstellen der Intefrandfunktion untersucht und das Integral anschließend in Bereiche unterteilt.*

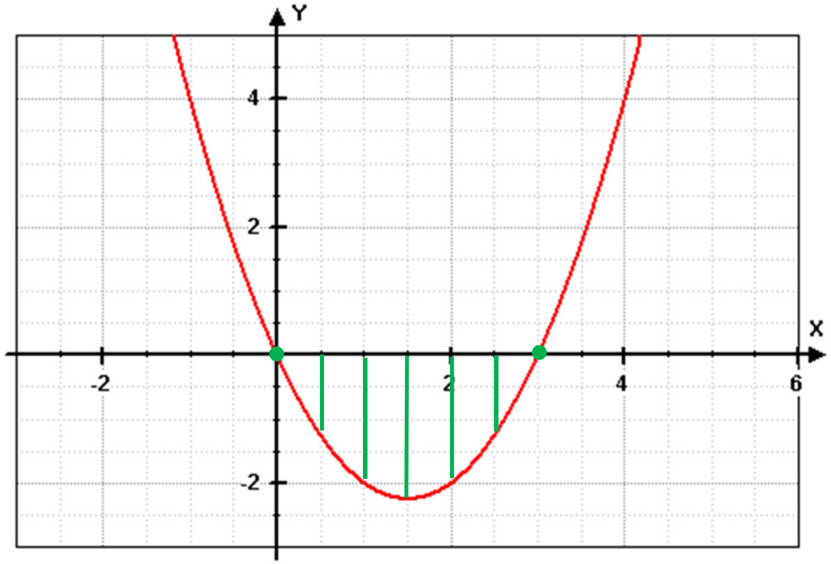
INTEGRALRECHNUNG III

Beispiel (unbestimmtes Integral):

$$\int \left(x^3 - 2x + 5\right) dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 - x^2 + 5 \cdot x + C$$

Beispiel (bestimmtes Integral/ zwischen Graph und x-Achse):

$$\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right) dx = \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right|_0^3 = \left|F(3) - F(0)\right| = \left|\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - 0\right]\right| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}$$



INTEGRALRECHNUNG IV

Beispiel (bestimmtes Integral/ mit Nullstellen innerhalb der Grenzen):

$$\int_1^5 (x-3)dx = \int_1^3 (x-3)dx + \int_3^5 (x-3)dx$$

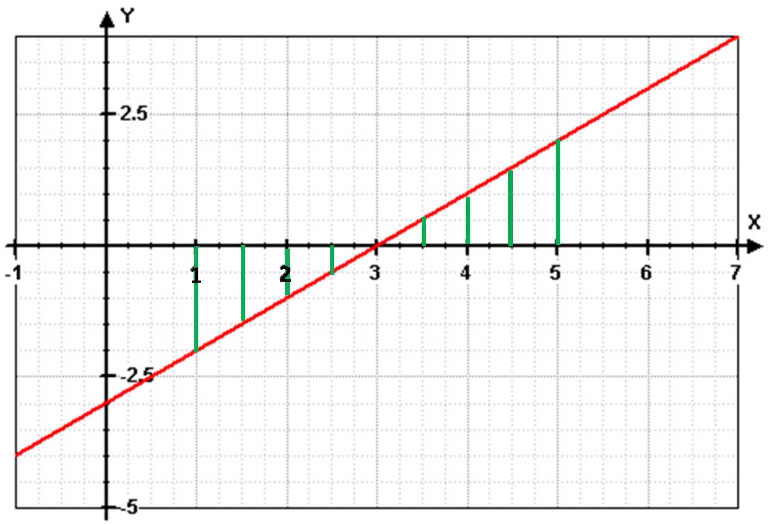
$$\int_1^5 (x-3)dx = \left| \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right) \right|_1^3 + \left| \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right) \right|_3^5$$

$$\int_1^5 (x-3)dx = \left|F(3) - F(1)\right| + \left|F(5) - F(3)\right|$$

$$\int_1^5 (x-3)dx = \left| \left(\frac{9}{2} - 9\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right) \right| + \left| \left(\frac{25}{2} - 9\right) - \left(\frac{9}{2} - 9\right) \right|$$

$$\int_1^5 (x-3)dx = \left| \left(-\frac{9}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}\right) \right| + \left| \left(\frac{7}{2}\right) - \left(-\frac{9}{2}\right) \right|$$

$$\int_1^5 (x-3)dx = \left| -\frac{4}{2} \right| + \left| \frac{16}{2} \right| = 10$$



AUFGABEN

1) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die zugehörige Stammfunktion.

a) $f(x) = 3x - 6x^2 - 5x^4 + 12$

b) $g(x) = \frac{7}{x^2} - \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x}$

2) Bestimmen Sie die Fläche die von der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird.

a) $g(x) = -x^2 - 3x - 2 \wedge x - Achse$

3) Berechnen Sie die Nullstellen der Integrandfunktion und geben anschließend den Flächeninhalt des Integrals an.

a) $\int_1^4 \left(x^2 + 2x - 8\right) dx$

b) $\int_{-2}^2 \left(x^4 - 4x^3\right) dx$