MATHEMATIK

26.01.2018

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was können Sie via Anzahl an Variablen und Gleichungen folgern?
- ✓ Wann nutzen Sie die Additionstheoreme?
- ✓ Was bedeutet die Phasenverschiebung?
- ✓ Wie können Sie den Wertebereich einer Funktion verschieben?
- ✓ Wie verändern Sie die Periode?
- ✓ Wie zeigen Sie, dass diese Periode gilt?
- ✓ Was bewirkt die Potenz einer trigonometrischen Funktion?
- ✓ Welche Symmetrien existieren bei einer Funktion?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wiederholungsaufgaben zur Trigonometrie.
- ✓ Aus welchen Bestandteilen besteht die Kurvendiskussion?
- ✓ Welche Ergebnisse liefern uns Funktion bzw. deren Ableitung?
- ✓ Welche Symmetrien gibt es?
- ✓ Wie bildet man die Ableitung eines Potenzausdrucks?
- ✓ Was geschieht bei einem Produkt aus zwei Funktionen?
- ✓ Was ändert sich wenn ein Bruch vorhanden ist?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen auf ihr Symmetrieverhalten .

a) $$f(x) = \frac{5 - x^4}{x^2} + 3$$

b) $$h(x) = 3 \cdot \left[\sin(2x - \pi) + 2\right]$$

2) Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen hinsichtlich des Wertebereichs, der Periode als auch des Symmetrieverhaltens und beweisen diese Eigenschaften. (Skizze)

$$k(x) = 5 + \frac{2}{3} \cdot \cos^4\left(\frac{1}{2} \cdot (\pi - x)\right)$$

KURVENDISKUSSION

Ist eine gegebene Funktion auf deren Definitionsbereich **stetig** als auch **differenzierbar**, kann u.a. mittels der Ableitungen deren Verlauf näher beschrieben werden.

Die folgenden **Zusammenhänge** sind bzgl. Funktion und Ableitung gültig:

✓Ausgangsfunktion:	y-Koordinate	(siehe Achsenschnittpunkte)
✓1. Ableitung:	Steigung	(Extremstellen)
✓2. Ableitung:	Krümmung	(Wendestellen)

Eine **Kurvendiskussion** besteht daher im Wesentlichen aus den folgenden Schritten:

1. Definitions- und Wertebereich
2. Grenzwertbestimmung
3. Symmetrieverhalten (Achsen-/ Punktsymmetrie)
4. Achsenschnittpunkte (x-/ y-Achse)
5. Extremstellen (Hoch-/ Tiefpunkte)
6. Wendestellen
7. Funktionsgraph

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente der gegebenen Funktion, in dem Sie ausschließlich die allgemeine Definition einer Geradengleichung und den Differenzenquotienten verwenden.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 20$$

ABLEITUNGEN

Handelt es sich um ein **ganzrationales** Polynom, eine „einfache“ **n-te Wurzel** oder ein einfaches x hoch n im **Nenner**, so werden die Ableitungen mittels folgendem Gesetz gebildet:

$$\boxed{f(x) = \alpha \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot n \cdot x^{n-1}}$$

Im ersten Schritt muss der Ausdruck in einen reinen Potenzausdruck umgewandelt werden

✓<u>Ganzrationales Polynom</u>:

$$f(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 4$$

$$f'(x) = 12 \cdot x^3 - 4 \cdot x + 12$$

✓<u>N-te Wurzel</u>:

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3 \cdot x^{\frac{3}{4}}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{9}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$$

✓<u>Einfacher Bruch</u>:

$$f(x) = \frac{3}{2 \cdot x^4} = \frac{3}{2} \cdot x^{-4}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot (-4) \cdot x^{-5} = -\frac{6}{x^5}$$

AUFGABEN

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen die 1. und 2. Ableitung.
Prüfen Sie ferner ob eine Achsen- / Punktsymmetrie vorliegt.

1) $$f(x) = -2 \cdot x^6 + 0{,}5 \cdot x^2 - 7$$

2) $$f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^4}} - \sqrt[5]{x^2}$$

3) $$f(x) = \frac{5}{x^5} - 2 \cdot \frac{3}{x}$$

PRODUKTREGEL

Handelt es sich bei der abzuleitenden Funktion um ein **Produkt**, das aus mindestens zwei **verschiedenen Funktionen** besteht, ist die Produktregel anzuwenden.

$$\boxed{\begin{aligned} & f(x) = g(x) \cdot h(x) \\ \\ & f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \end{aligned}}$$

Es empfiehlt sich die Funktionen des Produkts zuerst **separat** abzuleiten und anschließend die Formel mit den **Zwischenergebnissen** zu füllen.

<u>Beispiel</u>:

$$f(x) = \sin(x) \cdot \sqrt[3]{x^2} \quad \left\{ \begin{aligned} & g(x) = \sin(x) \\ & h(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & g'(x) = \cos(x) \\ & h'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} \end{aligned} \right\} \quad f'(x) = \cos(x) \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sin(x) \cdot \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

QUOTIENTENREGEL

Handelt es sich bei der abzuleitenden Funktion um einen **Qutienten** (Bruch), der aus mindestens zwei **verschiedenen** Funktionen besteht, ist die Qoutientenregel anzuwenden.

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}}$$

Es empfiehlt sich die Funktionen des Nenners bzw. des Zählers zuerst **separat** abzuleiten und anschließend die Formel mit den **Zwischenergebnissen** zu füllen.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^3 - 4x} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \cos(x) \\ \\ h(x) = x^3 - 4x \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = -\sin(x) \\ \\ h'(x) = 3x^2 - 4 \end{array} \right\} \quad f'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot (x^3 - 4x) - \cos(x) \cdot (3x^2 - 4)}{(x^3 - 4x)^2}$$

AUFGABEN

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen die 1. Ableitung und bestimmen jeweils den zugehörigen Definitionsbereich.

1) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^5}} + 2\sqrt[3]{x^4}$

2) $f(x) = \frac{2}{x^6} + 5 \cdot \frac{1}{x^3}$

3) $f(x) = 2 \cdot \cos^2(x)$

4) $f(x) = (3x^4 - \frac{2}{x^2}) \cdot 3\ln(x)$

5) $f(x) = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x^5}$

6) $f(x) = \frac{4 \cdot \left(x - 2x^4\right)}{3\cos(x)}$

KETTENREGEL

Sofern die Ableitung von einer **höherwertigen Funktion** gebildet werden soll, muss die Kettenregel angewandt werden.
Diese besagt, dass man mit der **äußersten Ableitung** beginnt und sich anschließend **mittels Produkt** Stück für Stück via Ableitungen zu der **innersten Funktion** nähert.

$$\boxed{f(x) = g[h(x)] \Rightarrow f'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)}$$

Beispiel:

$$f(x) = \sin(e^{4-3x})$$

$$[\sin(\alpha)]' = \cos(\alpha)$$

$$f'(x) = \cos(e^{4-3x}) \cdot [(e^{4-3x})]'$$

$$[e^{\alpha}]' = e^{\alpha}$$

$$f'(x) = \cos(e^{4-3x}) \cdot (e^{4-3x}) \cdot [4-3x]'$$

$$[\alpha \cdot x^n]' = \alpha \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$f'(x) = \cos(e^{4-3x}) \cdot (e^{4-3x}) \cdot (-3)$$

KONDOM-FUNKTION I

Eine **Kondom-Funktion** (höherwertige Funktion) ist dann vorhanden, wenn eine Funktion über eine andere Funktion **gestülpt** wird. (siehe Kettenregel).

✓Potenzfunktion:

$$\boxed{f(x) = [g(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = (x^3 - 4x)^3$$

$$f'(x) = 3 \cdot (x^3 - 4x)^2 \cdot [x^3 - 4x]' = 3 \cdot (x^3 - 4x)^2 \cdot (3x^2 - 4)$$

✓Trigonometriefunktion:

$$\boxed{f(x) = \sin[g(x)] \Rightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = \sin(0{,}5x^2)$$

$$f'(x) = \cos(0{,}5x^2) \cdot [0{,}5x^2]' = \cos(0{,}5x^2) \cdot x$$

$$\boxed{f(x) = \cos[g(x)] \Rightarrow f'(x) = -\sin(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = 2 - 3 \cdot \cos(3 - 4x)$$

$$f'(x) = 3 \cdot \sin(3 - 4x) \cdot [3 - 4x]' = -12 \cdot \sin(3 - 4x)$$

KONDOM-FUNKTION II

✓Logartihmusfunktion:

$$\boxed{f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

$$f(x) = \ln(\cos(x))$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot [\cos(x)]' = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\tan(x)$$

✓Exponentialfunktion:

$$\boxed{f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = e^{3\cdot\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = e^{3\cdot\sqrt{x}} \cdot [3 \cdot \sqrt{x}]' = e^{3\cdot\sqrt{x}} \cdot \frac{3}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Diese vier Funktionsklassen repräsentieren nahezu alle höherwertige Funktionen, wobei auch bei einer Verschachtelung von mehrerer dieser Funktionen immer die Kettenregel anzuwenden ist.

AUFGABEN

Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die ersten Ableitungen

1) $f(x) = 2 \cdot \sin(3x^3 - 5\sqrt{x})$

2) $g(x) = \ln(\frac{3}{x^3})$

3) $h(x) = 2(x^3 - \sin(4x))^5$

4) $k(x) = \sqrt[3]{e^{2x+1} - 4} \cdot \sin(3x)$

5) $l(x) = \ln(\sin(4x)) \cdot \sqrt{x^2 - 3x}$

6) $m(x) = \dfrac{(\sqrt{3x^3} + 2)^2}{5 \cdot \cos(3x - e^{2x})}$

EXTREMWERTPROBLEME I

Ein wirtschaftliches Anwendungsgebiet im Bereich der Analysis stellen sogenannte **Extremwertprobleme** dar. Dabei werden stets Größen einer Sachaufgabe gesucht, die ein **Minimum** bzw. ein **Maximum** darstellen.

Durch eine solche Problemstellungen existieren:

- Hauptbedingung:
  Dies ist eine mathematische Formel, die die gesuchte Größe (Frage) beschreibt und in der Regel von mehreren Variablen abhängig ist.

- Nebenbedingung:
  Hier werden die gegebenen Rahmenbedingungen ebenfalls in eine Formel gebracht. Wenn eine eindeutige Lösung gesucht ist, muss die Zahl der Nebenbedingungen immer um eins geringer sein als die Zahl der Variablen in der Hauptbedingung.

- Zielfunktion:
  Werden jetzt alle Nebenbedingung in die Hauptbedingung eingesetzt und dadurch nahezu alle Variablen ersetzt, so erhält man die Zielfunktion.

EXTREMWERTPROBLEME II

Beispiel:

Die Firma Koka-Coola möchte eine Dose auf den Markt bringen, die ein Fassungsvermögen von einem Liter besitzt. Sie werden nun beauftragt eine entsprechende Dose zu konstruieren, bei der der Materialverbrauch minimal ist.

- Hauptbedingung:
  Der Materialverbrauch ist von der Oberfläche der Dose abhängig, d.h. es wird die **Mantelfläche** und **Kreisfläche** benötigt.

  Es gilt: $O(r,h) = M + 2 \cdot A = 2\pi r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$

- Nebenbedingung:
  Da die Oberfläche von den Größen **Radius** und **Höhe** abhängt, benötigen wir eine Rahmenbedingung in Form der Füllmenge.

  Es gilt: $V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1\ dm^3 = 1.000\ cm^3$

EXTREMWERTPROBLEME III

Wenn man nun die Nebenbedingung nach der Variablen Höhe auflöst und in die Hauptbedingung einsetzt, erhält man die Zielfunktion.

- Zielfunktion:

Nebenbedingung: $h = \frac{1.000}{\pi \cdot r^2}$

Nach dem Einsetzen in die Hauptbedingung entsteht die Zielfunktion

$$O(r) = 2\pi r \cdot \left(\frac{1.000}{\pi \cdot r^2}\right) + 2\pi \cdot r^2 = \frac{2.000}{r} + 2\pi \cdot r^2$$

Da es sich nun um eine „normale“ Funktion handelt, kann mittels der Ableitungen der gesuchte Extremwert berechnet werden.

EXTREMWERTPROBLEME IV

<u>Lösung</u>:

$$O(r) = \frac{2.000}{r} + 2\pi \cdot r^2$$

$$O'(r) = -\frac{2.000}{r^2} + 4\pi \cdot r$$

$$O''(r) = \frac{4.000}{r^3} + 4\pi$$ *(ist stets positiv, daher Minimum)*

<u>Berechnung der Extremstelle:</u>

$$O'(r) = 0 \Rightarrow -\frac{2.000}{r^2} + 4\pi \cdot r = 0$$

$$4\pi \cdot r = \frac{2.000}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{2.000}{4\pi} = \frac{500}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$$

<u>Höhe</u>: $h = \frac{1.000}{\pi \cdot r^2} = \frac{1.000}{\pi \cdot 5{,}42^2} \approx 10{,}84$

<u>Oberfläche</u>: $O(r,h) = 2\pi r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$

$$O(r,h) = 2\pi \cdot 5{,}42 \cdot 10{,}84 + 2\pi \cdot 5{,}42^2$$

$$O(r,h) \approx 553{,}73$$

AUFGABEN

1) Ein Bauer möchte auf seinem Acker eine Wiese einzäunen und hat dafür einen Maschendrahtzaun von 200m zur Verfügung.

   Welche Maße hat das Grundstück, wenn er eine maximale Fläche haben möchte?

2) Eine Firma für Waffeleis möchte eine neue Eistüte produzieren.
   Die Form der Tüte entspricht die einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
   In diese neue Waffel müssen 250 ml Eis passen.

   Bei welchen Maßen Materialverbrauch minimal?

FUNKTIONSGLEICHUNGEN I

In einem weiteren Anwendungsgebiet der Analysis erzeugt man aufgrund von existierenden Punkten bzw. eines Funktionsgraphen die dazugehörige Gleichung.

Dazu werden im ersten Schritt alle benötigten Gleichungen aufgestellt.
Die Summe der existierende Koeffizient beschreibt alle benötigten Gleichungen.

<u>Beispiel:</u>
Erstellen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3, die im Punkt $(2/0)$ einen Sattelpunkt hat und bei 12 durch die y-Achse geht.

Die allgemeinen Gleichungen lauten:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

FUNKTIONSGLEICHUNGEN II

Die Angaben der Aufgabenstellung liefern die folgenden 4 Bedingungen:

Sattelpunkt $(2/0)$:	$f(2) = 0$:	$8a + 4b + 2c + d = 0$
	$f'(2) = 0$:	$12a + 4b + c = 0$
	$f''(2) = 0$:	$12a + 2b = 0$
Achsenschnittpunkt $(0/12)$:	$f(0) = 12$	$d = 12$

Durch das Lösen des obigen Gleichungssystems erhält man:

$$a = -\frac{3}{2}; b = 9; c = -18; d = 12$$

Die gesuchte Gleichung lautet somit:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 9x^2 - 18x + 12$$

AUFGABEN

1) Gesucht ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 3, die an den Stellen 2 und 3 durch die x-Achse geht und bei $(1/4)$ einen Hochpunkt besitzt.

2) Bestimmen Sie anhand des gegebenen Graphen die zugehörige Funktion