

# MATHEMATIK

**25.01.2018**

# ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wiederholungsaufgaben zur Stetigkeit / Differenzierbarkeit.
- ✓ Welche Symmetrien gibt es?
- ✓ Welche Symmetrien hat eine trigonometrische Funktion?
- ✓ Wie verändert man die Periode?
- ✓ Was bewirkt die Potenz beim Sinus / Cosinus?
- ✓ Was bewirkt eine Phasenverschiebung?
- ✓ Wie können die Amplituden variiert werden.
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

# AUFGABEN

- 1) Gegeben seien die folgenden gesplitteten Funktionen.  
Berechnen Sie die Parameter  $a$  und  $b$ , so dass die Funktion stetig und differenzierbar sind und fertigen Sie eine Skizze der zugehörigen Graphen an.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + b; & x < 1 \\ x - a \cdot x^2; & x \geq 1 \end{cases}; a, b \in \mathfrak{R}$$

- 2) Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen auf ihr Symmetrieverhalten .

a)  $f(x) = \frac{3x}{2x^2 - 4}$

b)  $f(x) = \sin(2x) - 3$

# SYMMETRIEVERHALTEN

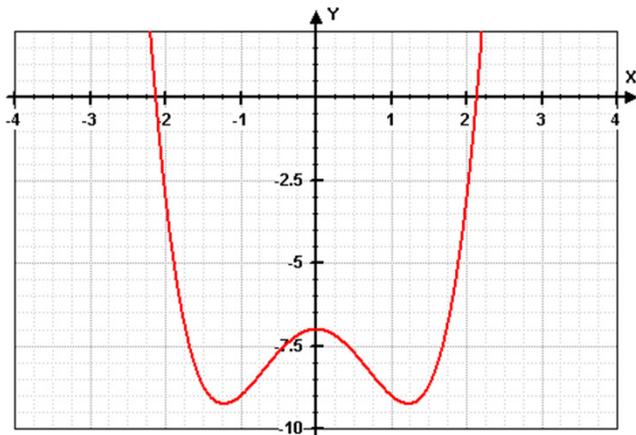
Eine Funktion kann entweder **achsensymmetrisch** zur y-Achse oder **punktsymmetrisch** zum Ursprung sein. Liegt keine der beiden Möglichkeiten vor, existiert auch **keine Symmetrie**.

## ✓ Achsensymmetrie

$$f(x) = f(-x)$$

Beispiel:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^4 - 3x^2 - 7 \\ f(-x) &= (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^2 - 7 \end{aligned} \right\} =$$

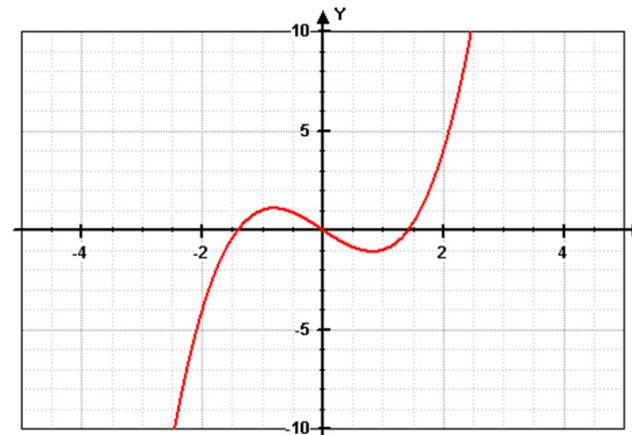


## ✓ Punktsymmetrie

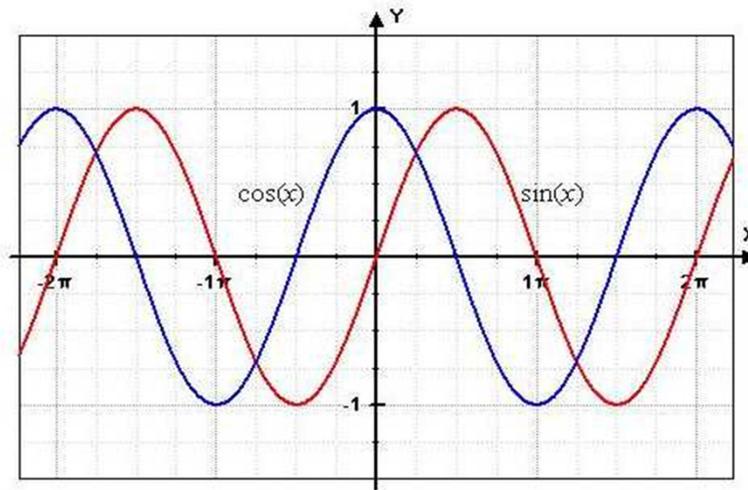
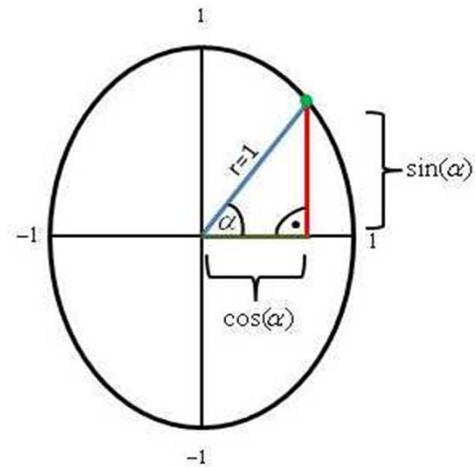
$$f(x) = -f(-x)$$

Beispiel

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x \\ -f(-x) &= -((-x)^3 - 2 \cdot (-x)) \end{aligned} \right\} =$$



# TRIGONOMETRIE I



## Bestimmte Sinus und Cosinuswerte

DEG	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
RAD	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
SIN	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
COS	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

# TRIGONOMETRIE II

Für die Sinus/ Cosinus-Funktion sind im Bereich der **Addition der Argumente** zwei **Additionstheoreme** definiert, wodurch stets bei **rechtwinkliger Konstellation** entweder ein Sinus oder ein Cosinus aus der Funktion **entfernt** werden kann.

$$1) \sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(2x)$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(2x) = \cos(2x)$$

90° Phasenverschiebung  
der Sinusfunktion = Cosinusfunktion

$$2) \cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - 3x\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) \cdot \cos(3x) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \cdot \sin(3x)$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - 3x\right) = 0 \cdot \cos(3x) + (-1) \cdot \sin(3x) = -\sin(3x)$$

270° Phasenverschiebung  
der Cosinusfunktion = -Sinusfunktion

# TRIGONOMETRIE III

Eine rein trigonometrische Funktion (**sinus/ cosinus**) stellt eine **Schwingung** innerhalb einer bestimmbar **Periode** und eines konstanten Wertebereichs dar, die für alle reellen Zahlen definiert ist.

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$$

Die vier Parameter in der Funktion beziehen sich zum einen auf die **Verschiebung** und zum anderen auf die **Streckung/ Stauchung** in der x-Achsen bzw. y-Achsen-Richtung:

a:	Amplitudenfaktor	Streckung/Stauchung in y-Achsen-Richtung
b:	Periodenfaktor	Streckung/Stauchung in x-Achsen-Richtung
c:	Phasenverschiebung	Verschiebung in x-Achsen-Richtung
d:	Wertebereichverschiebung	Verschiebung in y-Achsen-Richtung

Symmetrie:	→	SIN: Punktsymmetrie	$f(x) = -f(-x) \Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$
	→	COS: Achsensymmetrie	$f(x) = f(-x) \Rightarrow \cos(x) = \cos(-x)$

Bei dem Periodenfaktor gilt für die **neue Periode**:

$$P_{NEU} = \frac{P_{ALT}}{b}$$

# TRIGONOMETRIE IV

**Beispiel:**  $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x + 3\pi\right) + 4$

**Vereinfachung:**  $f(x) = 3 \cdot \left[ \sin\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot \cos(3\pi) + \sin(3\pi) \cdot \cos\left(\frac{2}{3}x\right) \right] + 4$

$$f(x) = (-3) \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + 4$$

**Wertebereich:**  $-3 \cdot [-1;1] + 4 = [-3;3] + 4 \implies W = y \in [1;7]$

**Periode:**  $P_{NEU} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi \implies f(x) = f(x + 3\pi)$

$$f(x) = -3 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}(x + 3\pi)\right) + 4 = -3 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x + 2\pi\right) + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[ \sin\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cdot \cos\left(\frac{2}{3}x\right) \right] + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[ \sin\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot 1 + 0 \cdot \cos\left(\frac{2}{3}x\right) \right] + 4 = -3 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + 4$$

# TRIGONOMETRIE V

**Beispiel:**

$$f(x) = (-3) \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + 4$$

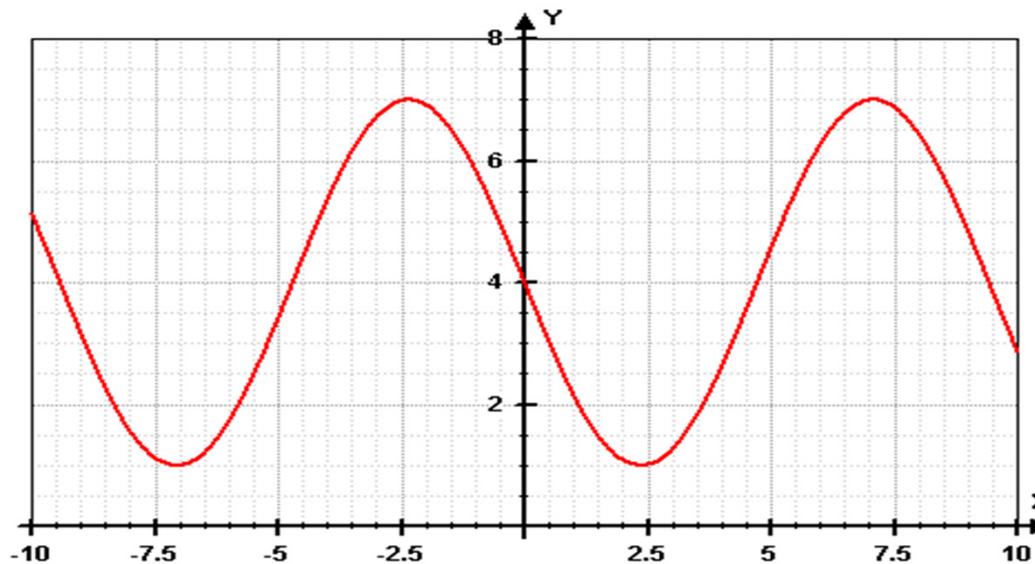
*Symmetrie:*

Punktsymmetrie  $f(x) - 4 = -[f(-x) - 4]$

$$f(x) - 4 = -3 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + 4 - 4 = -3 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$-[f(-x) - 4] = -\left[-3 \cdot \sin\left(-\frac{2}{3}x\right) + 4 - 4\right] = 3 \cdot \sin\left(-\frac{2}{3}x\right)$$

*Skizze:*



# TRIGONOMETRIE VI

Anhand der folgenden Vierfeldertafel können die grundlegenden Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion direkt abgelesen werden.

Es wird dabei davon ausgegangen, dass es sich um eine Standardfunktion in der Form  $\sin^n(g(x))$  oder  $\cos^n(h(x))$  handelt.

**Vierfeldertafel**

	<i><b>n = gerade</b></i>	<i><b>n = ungerade</b></i>
<i><b>sin<sup>n</sup>(g(x))</b></i>	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = -f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
<i><b>cos<sup>n</sup>(h(x))</b></i>	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$

# AUFGABEN

Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und fertigen Sie eine Skizze an.

1)  $f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(4x - 5\pi)$

2)  $g(x) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\pi\right) + 5$

3)  $h(x) = 2 - \cos(3x)$

4)  $k(x) = 2x^3 - \frac{5}{2x}$