MATHEMATIK

19.01.2018

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie erhält man eine Ersatzfunktion?
- ✓ Was bedeutet eine behebbare Lücke?
- ✓ Was ist eine Asymptote?
- ✓ Wann haben wir eine waagerechte Asymptote?
- ✓ Wann entsteht eine senkrechte Asymptote?
- ✓ Was bedeuten die Vorzeichen in den Exponenten?
- ✓ Wann liegt eine diagonale Asymptote vor?
- ✓ Wie berechnet man eine diagonale Asymptote?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wiederholungsaufgaben zu Asymptoten.
- ✓ Wie beweist man die Differenzierbarkeit?
- ✓ Was bedeutet die Stetigkeit einer Funktion?
- ✓ Wie sieht eine gesplittete Funktion aus?
- ✓ Welche Arten der Symmetrie existieren?
- ✓ Wie zeigt man Achsensymmetrie?
- ✓ Wie beweist man eine verschobene Punktsymmetrie?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

1) $$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}$$

2) $$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$$

STETIGKEIT

Eine Funktion wird über ihren Definitionsbereich als **stetig** bezeichnet, sofern man sie in einem **durchzeichnen** kann, d.h. man darf den Stift nicht vom Blatt nehmen, um die Funktion zeichnen zu können.

Es gilt:

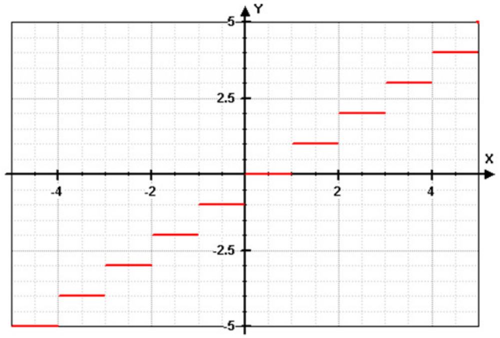
$$\boxed{\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} f(x) = f(\alpha)}$$

Daher ist eine Untersuchung u.a. primär bei folgenden Funktionen durchzuführen:

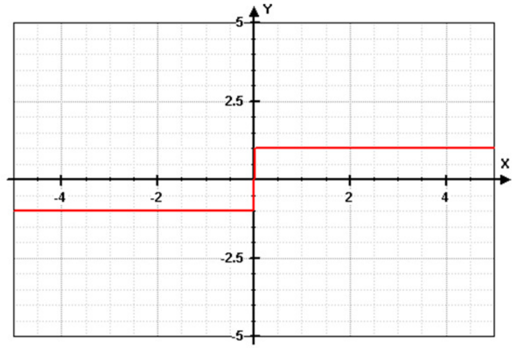
✓Gesplittete Funktion

✓Gebrochenen Funktionen

✓Gauß-Funktion (Abrundung)



✓Sgn-Funktion (Vorzeichen)



DIFFERENZIERBARKEIT

Eine Funktion wird über ihren Definitionsbereich als **differenzierbar** bezeichnet, wenn Sie stetig ist **und** sofern man sie ohne Pause durchzeichnen kann, d.h. der Graph der Funktion darf keinerlei Ecken besitzen.

Es gilt:

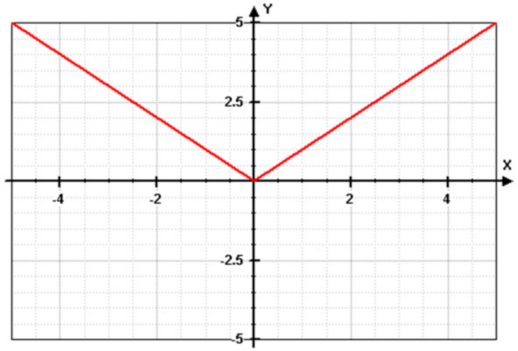
$$\boxed{\lim_{x \to \alpha^+} f'(x) = \lim_{x \to \alpha^-} f'(x) = f'(\alpha)}$$

Daher ist eine Untersuchung u.a. primär bei folgenden Funktionen durchzuführen:

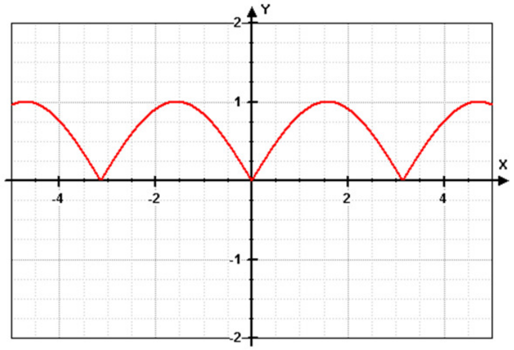
✓Gesplittete Funktion

✓Gebrochenen Funktionen

✓Lineare Betragsfunktion



✓Trigonometrische Betragsfunktion



BEISPIEL I

Gegeben sei die folgende gesplittete Funktion.
Wie sind die Parameter *a* und *b* zu wählen, damit die Funktion stetig und differenzierbar ist?

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a; x\geq 1 \\ x\cdot(4-b); x<1 \end{cases}; a,b\in\Re \qquad \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x; x\geq 1 \\ 4-b; x<1 \end{cases}$$

<u>stetig</u>:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+} f(x)=x^2+a=1+a=f(1) \\ &\lim_{x\to 1^-} f(x)=x\cdot(4-b)=4-b \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1+a=4-b$$

<u>differenzierbar</u>:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+} f'(x)=2x=2=f'(1) \\ &\lim_{x\to 1^-} f'(x)=4-b=4-b \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2=4-b$$

$$2=4-b \Leftrightarrow b=2$$

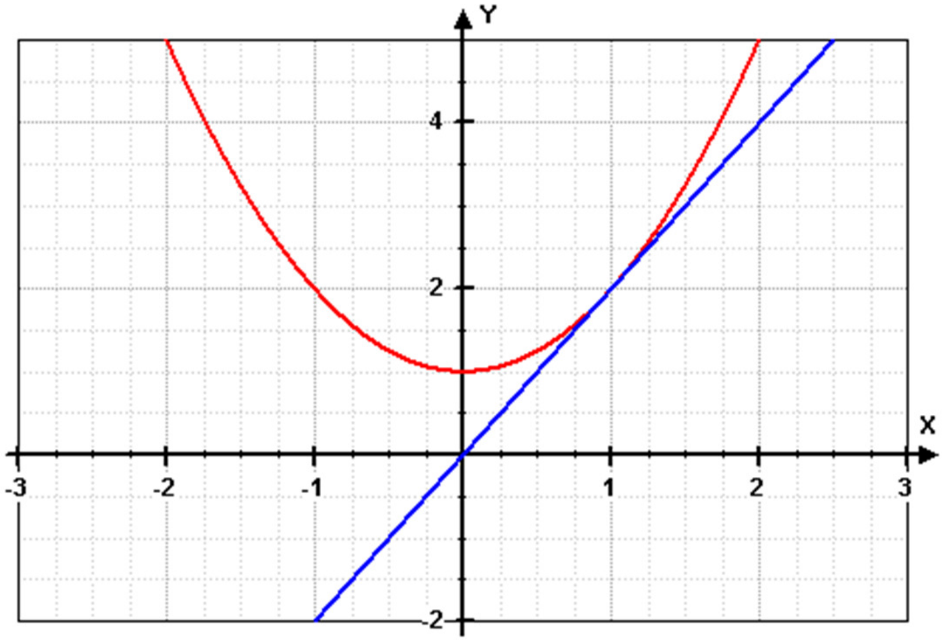
$$a+b=3 \Leftrightarrow a=1$$

BEISPIEL II

Durch die Parameter *a=1* und *b=2*, ist die Funktion stetig und differenzierbar?

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a=x^2+1; x\geq 1 \\ x\cdot(4-b)=2x; x<1 \end{cases}$$

<u>Funktionsgraph</u>:



AUFGABEN

1) Gegeben seien die folgenden gesplitteten Funktionen.
Berechnen Sie die Parameter *a* und *b*, so dass die Funktion stetig und differenzierbar sind und fertigen Sie eine Skizze der zugehörigen Graphen an.

$$f(x)=\begin{cases} -a\cdot x^2+1; x<2 \\ x-4; x\geq 2 \end{cases}; a\in\Re$$

2) Untersuchen Sie die gegebene Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-2}; x>3 \\ \\ -\dfrac{2}{3}\cdot x^2+9; x\leq 3 \end{cases}$$