

MATHEMATIK

12.01.2018

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was versteht man unter einem Grenzwert?
- ✓ Wo sollte man den Grenzwert nur berechnen?
- ✓ Was ist ein links- bzw. rechtsseitiger Grenzwert?
- ✓ Was besagt die Faustregel der Grenzwertberechnung?
- ✓ Welche bekannten Grenzwerte kennen Sie?
- ✓ Was passiert bei der Division von 2 Polynomen?
- ✓ Wie funktioniert die Regel von L'Hospital?
- ✓ Wann sollte man mit dem 3. Binom erweitern?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wiederholungsaufgaben zu Grenzwerten.
- ✓ Wie kann man einen Grenzwert interpretieren?
- ✓ Was sind Asymptoten?
- ✓ Wie bestimmt man eine diagonale Asymptote?
- ✓ Wann liegt eine waagerechte Asymptote vor?
- ✓ Was bedeutet eine behebbare Lücke?
- ✓ Grafische Interpretation von Asymptoten / Funktionsverlauf.
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

I. Geben Sie zu den folgenden Aufgaben den Grenzwert an.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow (-4)} \frac{2x+8}{\sqrt{8-2x} - (8+x)}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 2x^2 - 12x + 16}{x^2 + x - 20} \quad \text{Berechnung auf 2 Arten!}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^x - \frac{3}{\sqrt[x]{9}} + \left(\frac{2 \cdot \sin(x)}{4 \cdot x} \right)^2$$

ASYMPTOTEN I

Eine Asymptote ist ein **Näherungsgraph**, an die sich die untersuchte Funktion unendlich nahe **anschmiegt**, d.h. der Abstand zwischen Funktion und Asymptote ist nahezu Null.

Sie werden dadurch berechnet, in dem man die zugehörigen Grenzwerte an den **Rändern des Definitionsbereich** bestimmt.

Es unterscheiden sich aufgrund der Möglichkeiten bei der Grenzwertbetrachtung folgende Arten:

✓ Waagerechte Asymptote:

Im Unendlichen nähert sich die Funktion einem konstanten Wert an.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$

✓ Senkrechte Asymptote:

Bei Annäherung an eine Konstante verläuft der Graph im Unendlichen.

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \infty$$

✓ Diagonale Asymptote:

Im Unendlich nähert sich die Funktion der Unendlichkeit an.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

✓ Behebbarer Lücke:

Bei Annäherung an eine Konstante nähert sich der Graph einer Konstanten.

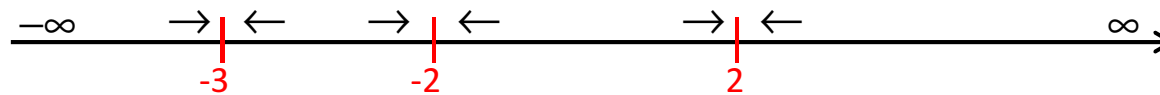
$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = k$$

ASYMPTOTEN II

Beispiel A: $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 10x - 12}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; 2\}$

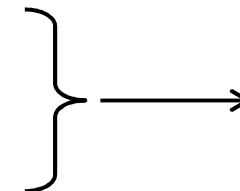
$$f(x) = \frac{2 \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)}{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x+3)} \Rightarrow f_e(x) = \frac{2 \cdot (x+1)}{x+2}$$

Ersatzfunktion



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f_e(2) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = f_e(-3) = 4$$



behebbarer Lücke

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = \infty$$



senkrechte Asymptote

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 2^+$$

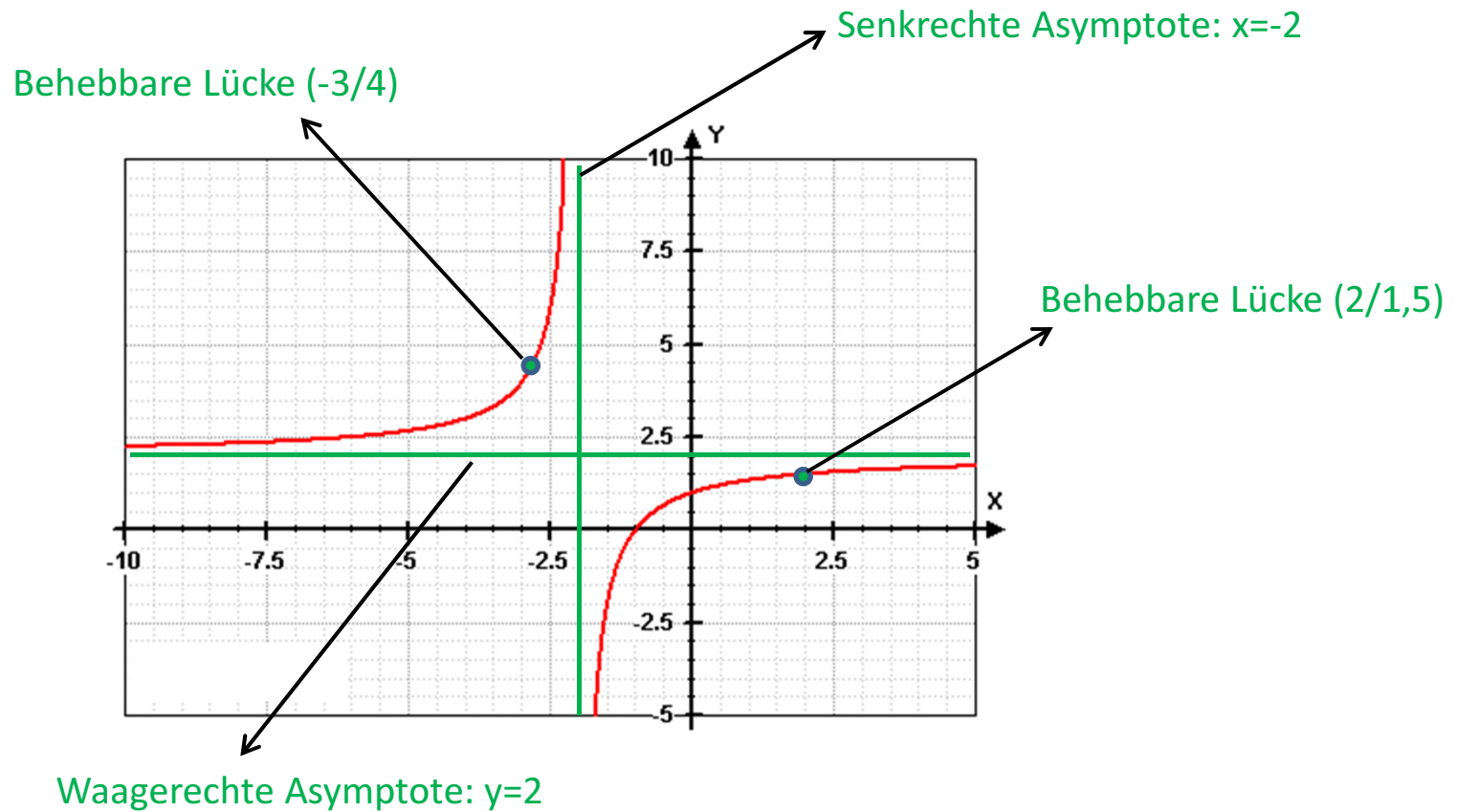
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 2^-$$



waagerechte Asymptote

ASYMPTOTEN III

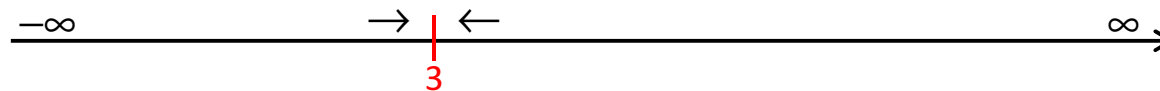
Funktionsgraph zu Beispiel A:



ASYMPTOTEN IV

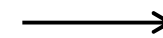
Beispiel B:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 3} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \left[\frac{-5}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \left[\frac{-5}{0^-} \right] = \infty$$



Senkrechte Asymptote

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}{x \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = [x] = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2 - 2x - 8) \div (x - 3) = \underbrace{x + 1}_{\text{diagonale Asymptote}} + \frac{-5}{x - 3}}{\frac{x - 8}{-(x - 3)} = \frac{-5}{-5}}$$

$$f(0) = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$$

$$f(x) = 0$$

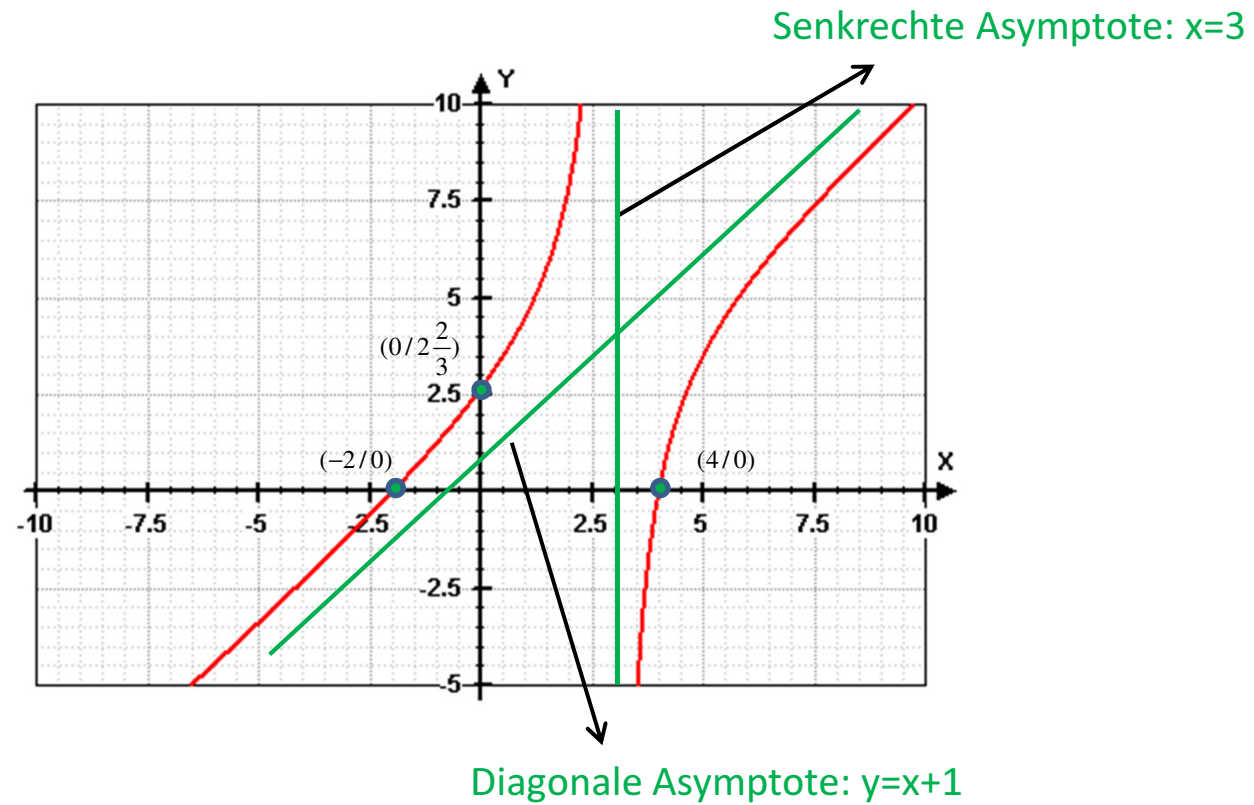
$$0 = (x - 4) \cdot (x + 2)$$

$$x_1 = 4 \vee x_2 = -2$$

*Achsen-
Schnittpunkte*

ASYMPTOTEN V

Funktionsgraph zu Beispiel B:



AUFGABEN

- I. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

$$1) \quad f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{2x^3 - 2x^2 - 16x + 24}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 2x + 40}{x^2 - x - 12}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 2x - 8}$$