

MATHEMATIK

11.01.2018

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie ist der Grenzwert von $\sum q^k$ definiert?
- ✓ Was ist die harmonische Reihe?
- ✓ Wie groß ist der Grenzwert der geometrischen Reihe?
- ✓ Was macht man beim Vergleichskriterium?
- ✓ Wann sollte man den Wurzelsatz verwenden?
- ✓ Was macht man bei Fakultäten?
- ✓ Wann spricht man von einem echten Alternierungswert?
- ✓ Wie funktioniert der Satz von Leibniz?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was versteht man unter einem Grenzwert?
- ✓ Welche Rolle spielt die Epsilon-Umgebung?
- ✓ Welche Möglichkeiten der Annäherung gibt es?
- ✓ Welche bekannte Zusammenhänge existieren?
- ✓ Was ist die Faustregel der Grenzwertbestimmung?
- ✓ Wie erfolgt die Erweiterung mittels 3. Binom?
- ✓ Was versteht man unter der Regel von L'Hospital?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

GRENZWERTE I

Wird der Grenzwert (**LIMES**) einer Funktion an eine **definierte Zahl** angenähert und ist das entstehende **Ergebnis** innerhalb einer **kleinstmöglichen Umgebung** konstant, so existiert der Grenzwert und die Funktion **konvergiert** (Gegenteil: divergiert).

Es wird unterschieden, ob man sich der **Unendlichkeit** oder einer **Konstanten** annähert:

✓ Unendlichkeit: $\lim_{x \rightarrow \infty} (42 + e^{-x}) = [42 + 0] = 42$

✓ Konstant: $\lim_{x \rightarrow 2} (\ln(x - 2)) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow n} f(x) = \alpha$

Annäherung Funktion Grenzwert

Je nachdem **von wo** man sich einer Konstanten nähert wird dies durch ein **+/- im Exponenten** der Annäherungszahl dargestellt (*Ladung von Ionen*), gleiches gilt für den erreichten Grenzwert.

✓ Vom Positiven (rechts): $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \alpha^- \longrightarrow$ Der Grenzwert wird von **unten** angesteuert

✓ Vom Negativen (links): $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \alpha^+ \longrightarrow$ Der Grenzwert wird von **oben** angesteuert

GRENZWERTMETHODIK I

Da es verschiedene Möglichkeiten der Grenzwertbestimmung gibt, ist es wichtig die einfachste (effizienteste) Regel zur Lösung der Aufgabe anzuwenden.

Die im Folgenden beschriebenen Schritte haben sich bewährt:

1. Bekannte Zusammenhänge:

Ist ein spezieller bzw. bekannter Grenzwert vorhanden?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \vee \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1 \vee \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \vee \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \vee \lim_{x \rightarrow \infty} q^x = 0; |q| < 1$$

2. Faustregel:

Trifft Unendlichkeit / Null auf eine Konstante?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\text{Ausdruck}) = \left[\frac{k}{\infty} \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Konstant durch unendlich ist Null}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{Ausdruck}) = \left[\frac{k}{0} \right] = \infty \quad \longrightarrow \quad \text{Konstant durch Null ist unendlich}$$

GRENZWERTMETHODIK II

3. Gebrochen-Rationaler Ausdruck:

Polynom vom Grade m / Polynom vom Grade n

$$x \rightarrow \infty$$

a) *Grad (Zähler/m) > Grad (Nenner/n):* \Rightarrow Grenzwert ist **unendlich**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x + 5}{5 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \cdot \left(2 - \frac{3}{x^3} + \frac{5}{x^4}\right)}{x^2 \cdot \left(\frac{5}{x^2} - 1\right)} = \left[\frac{2x^2}{-1} \right] = -\infty$$

b) *Grad (Zähler/m) < Grad (Nenner/n):* \Rightarrow Grenzwert ist **Null**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 25}{x^3 - 4x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \left(2 - \frac{25}{x}\right)}{x^3 \cdot \left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)} = \left[\frac{2}{x^2} \right] = 0$$

c) *Grad (Zähler/m) = Grad (Nenner/n):* \Rightarrow Grenzwert ist **konstant**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 5}{4 - x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \left(2 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(\frac{4}{x^2} - 1 + \frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{2}{-1} \right] = -2$$

Ausklammern des
größten
Potenzausdrucks



Entstehende
Nullfolgen
fallen weg!

GRENZWERTMETHODIK III

3. Gebrochen-Rationaler Ausdruck:

Polynom vom Grade m / Polynom vom Grade n

$$x \rightarrow k$$

d) *unabhängig vom Grad des Zählers / Nenners:*

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}{x^2 + x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+1) \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1) \cdot (x+4)}{(x+3)} = \left[\frac{3 \cdot 6}{5} \right] = \frac{18}{5} = 3 \frac{3}{5}$$

Sollte nicht $\left[\frac{0}{0} \right]$ als erstes Zwischenergebnis heraus kommen,
greift die Fausregelformel unter Punkt 2).

Faktorisierung
des
Polynoms



Kürzen
des
Linearfaktors

GRENZWERTMETHODIK IV

4. Erweiterung:

Mittels 3. Binom erfolgt die Vereinfachung

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2 \cdot \sqrt{6-x} - 4} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2 \cdot \sqrt{6-x} - 4} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{6-x} + 4}{2 \cdot \sqrt{6-x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (2 \cdot \sqrt{6-x} + 4)}{4 \cdot (6-x) - 16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot 2 \cdot \sqrt{6-x} + 4}{-4 \cdot \cancel{(x-2)}} = \left[\frac{8}{-4} \right] = -2$$

5. Substitution:

Ersetzung, um auf einen bekannten Ausdruck zu kommen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\sin(\gamma)}{\gamma} = 1$$



Substitution: $\gamma = \frac{1}{x} : x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \gamma \rightarrow 0$

GRENZWERTMETHODIK V

6. Regel von L'Hospital:

Bei 0/0 geht man ins Krankenhaus

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin(x)]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \left[\frac{1}{1} \right] = 1$$

7. Dominanzprinzip:

Unendlich trifft auf Null: Der Stärkere gewinnt

Mittels 1. Ableitung wird die Steigung ermittelt und aufgrund derer Klassifizierung die dominante Funktion / Ausdruck bestimmt.

$$\begin{array}{l} \infty \cdot 0 \\ \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} 0 : \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot \frac{1}{e^x} \right) = 0 \\ k : \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{x+2} \cdot \frac{1}{e^x} \right) = e^2 \\ \infty : \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x^2} \right) = \infty \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{exponentiell Funktion} \\ \text{ist stärker als} \\ \text{Potenzfunktion} \end{array}$$

AUFGABEN

I. Geben Sie zu den folgenden Aufgaben den Grenzwert an.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow (2)} \frac{21x - 42}{\sqrt{0,5x} - \sqrt{3-x}}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x - \sqrt[x]{5}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{7x^3 + 2x^2 - x^4}{3x^4 + 1}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 2x - 8}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{3 \cdot e^x}{x^2}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{2 + \frac{3}{x}}$$