MATHEMATIK

15.12.2017

AUFGABEN

I. Erstellen Sie bei den gegebenen Reihen die Formeln der Partialsumme, in dem Sie alle möglichen Verfahren anwenden.

1) $\sum_{k=2}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$

2) $\sum_{k=3}^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

3) $\sum_{k=2}^{6} 0{,}25 \cdot 0{,}1^{k-2}$

REIHEN – GRENZWERTE I

Wenn der **Grenzwert** einer Reihe berechnet werden soll, kann dies nur dann geschehen, denn die zugehörige Folge als Grenzwert Null hat (**Nullfolge**), da somit im Unendlichen der **Reihenwert** durch die Addition von Null **nicht mehr verändert** werden kann.

Grenzwert:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 \ldots + q^n}_{\text{Geometrische Reihe}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{\text{Grenzwert}} ; |q| < 1, da \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, da \left|\frac{1}{2}\right| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \Rightarrow divergent, da \left|\frac{3}{2}\right| \geq 1$$

REIHEN – GRENZWERTE II

Ist der **Startwert** eines Reihengrenzwertes **ungleich Null**, so existieren die gleichen 3 Möglichkeiten wie bei der Partialsumme den Grenzwert der Reihe zu bestimmen:

1) Differenzen von Partialsummen:

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-0{,}5} - \frac{1-0{,}5^3}{1-0{,}5} = 2-\frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

2) Subtraktion der fehlenden Elemente:

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2-1\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

3) Verschiebung der Grenzen

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+3} = \frac{1}{8}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-0{,}5} = \frac{1}{4}$$

REIHEN – GRENZWERTE III

Ähnlich wie bei den speziellen Grenzwerten von Funktionen, gibt es auch im Bereich der Reihen besondere Formen mit **definierten Grenzwerten.**

1) <u>Geometrische Reihe:</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

2) <u>Harmonische Reihe:</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\Rightarrow divergent$$

3) <u>Spezielle Reihen:</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\ldots+\frac{x^n}{n!}=e^x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\ldots\pm\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\ldots\pm\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$$

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den gegebenen Reihen die Partialsumme bzw. den zugehörigen Grenzwert.

a) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$

b) $\sum_{k=2}^{5} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k}\right)^2 - \sum_{k=0}^{3} 5^k$

d) $4 \cdot \sum_{k=3}^{8} 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$

e) $\sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}$

f) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{3 \cdot x^{2k}}{(2k)!}$

REIHEN – KONVERGENZ I

Eine Summenreihe ist dann **konvergent**, wenn sie entweder einem **bestimmten Grenzwert** besitzt oder wenn die Existenz eines Grenzwertes mittels der **Konvergenzkriterien** beweisen wurde.

1) <u>Vergleichskriterium:</u> $a_k \leq b_k \rightarrow$ Ist a_k konvergent, dann ist auch b_k konvergent

$$\sum \frac{1}{k^3} \rightarrow \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$$ *(geometrische Reihe)* $\Rightarrow konvergent$

2) <u>Wurzelsatz:</u>

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$$

$$\sum \frac{k}{2^k} \rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \frac{1}{2} < 1$$ $\Rightarrow konvergent$

3) <u>Quotientensatz:</u>

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$$

$$\sum \frac{2^k}{k!} \rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot 2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1$$ $\Rightarrow konvergent$

4) <u>Leibniz-Satz:</u>

$$\sum (-1)^k \cdot b_k \rightarrow \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

$$\sum (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \rightarrow \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right) = 0$$ $\Rightarrow konvergent$

REIHEN – KONVERGENZ II

Um die Konvergenz einer Reihe zu beweisen, empfiehlt sich die folgende Vorgehensmethodik:

1) <u>Schritt (**Nullfolge**):</u>

   Ist die Folge a_k konvergent und handelt es sich um eine Nullfolge?

   Bei **JA** gehe zu Schritt 2

   Bei **NEIN** ist die ist die Reihe divergent, obwohl die Folge konvergieren könnte.

2) <u>Schritt (**Reihe**):</u>

   Handelt es sich um eine **geometrische Reihe** der Form $\sum q^k$?

   $\rightarrow |q| < 1 \Rightarrow$ *konvergent, da* $\lim\limits_{k\to\infty} |<1|^k = 0$ *gilt.*

   $\rightarrow |q| \geq 1 \Rightarrow$ *divergent, da* $\lim\limits_{k\to\infty} |\geq 1|^k \geq 1$ *gilt.*

   Ist die Reihe $\sum \frac{1}{k^\beta}$?

   Vergleichskriterium

   $\rightarrow \beta > 2 \Rightarrow$ *konvergent, Vergleich mit* $\frac{1}{k^2}$ *(geometrische Reihe)*

   $\rightarrow \beta < 2 \Rightarrow$ *divergent, durch Widerspruch mit* $\frac{1}{k}$ *(harmonische Reihe)*

REIHEN – KONVERGENZ III

2) <u>Schritt (**Reihe**):</u>

Wurzelsatz

Sind viele Variable im **Exponenten** und/oder in der **Basis**?

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\beta^k} = \beta \vee \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\beta \cdot k} = 1$$

Quotientensatz

Sind **Fakultäten** in der Folge enthalten?
Setze *(k+1)* in die Folge a_k ein und schreibe auf den gleichen Bruchstrich den Kehrwert von $a_k \Rightarrow$ Kürzen der Fakultäten.

Leibnizsatz

Ist ein **Alternierungswert** $(-1)^{k+1}$ vorhanden?
Streiche den alternierungswert und bilde von dem Rest den Grenzwert gegen unendlich. Das Ergebnis muss eine Nullfolgesein.

REIHEN – KONVERGENZ IV

3) <u>Schritt (**Grenzwert**):</u>

Nutze bekannte Zusammenhänge wie z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Nutze die Summenformel der geometrischen Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Ist der **Startwert** falsch?

Verschiebe / erhöhe die Variable um die „Verfälschung“ $(k + \beta)$

Subtrahiere die ersten β Elemente der Reihe von dem Grenzwert.

AUFGABEN

1) Prüfen Sie bei den folgenden Reihen deren Konvergenzverhalten.

a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2+1} + \frac{2}{k!}$$

b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{4k+1}}$$

c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{-k+1} \cdot k^2}{3k-2}$$