MATHEMATIK

14.12.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann spricht man von einer Reihe?
- ✓ Warum spielt die Folge bei einer Reihe eine große Rolle?
- ✓ Was versteht man unter Position, Ausprägung und Reihenwert?
- ✓ Wie kann man die mögliche Summenformel erhalten?
- ✓ Was passiert in der ersten Induktionsschritt?
- ✓ Woran erkennt man an welcher Stelle zu starten ist?
- ✓ Wie heißt die Formel des Induktionsschluss?
- ✓ Warum gilt diese Formel?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben zur vollständigen Induktion bei Reihen
- ✓ Was versteht man unter einer Partialsumme?
- ✓ Wie bestimmt man den Grenzwert einer Reihe?
- ✓ Was ist eine geometrische Reihe?
- ✓ Warum ist die harmonische Reihe divergent?
- ✓ Welche Konvergenzkriterien gibt es?
- ✓ Welche Standardmethodik kann man nutzen?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Zeigen Sie mittels dem Verfahren der vollständigen Induktion, dass die folgenden Aussagen bzw. Zusammenhänge gültig sind:

a) $$\sum_{k=0}^{n} 5^{k} = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

b) $$\sum_{\acute{}k=1}^{n} k^{3} = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^{2}$$

2) In einem Betrieb mit *n* PCs soll ein vollständiges Netzwerk aufgebaut werden, bei dem jeder Computer direkt mit jedem anderen Computer verbunden ist

Finden Sie eine möglichst einfache Formel für die Anzahl der benötigten Verbindungen und beweisen Sie diese.

Tipp: $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$$

ENTSCHEIDUNGSBAUM

Aussagendefinition mit $n \geq \alpha$

Ist eine Reihe vorhanden?

JA

NEIN

$\boxed{n = \alpha}$

Induktionsanfang

$\sum$ Summe: $a_\alpha = S_\alpha$

$\prod$ Produkt: $a_\alpha = P_\alpha$

Ungleichung: $a_\alpha > b_\alpha ; a_\alpha < b_\alpha$

Rekursion: $F(\alpha) = a_\alpha$

$\boxed{n = n+1}$

Induktionsschluss

$\sum : S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$

$\prod : P_n \cdot a_{n+1} = P_{n+1}$

→ Gleichung auseinander ziehen

→ Ausdruck ersetzen

TEILBARKEIT

Eine Formel / Term sei durch γ teilbar. Beweis?

$\downarrow$

$$Formel = \gamma \cdot k; k \in Z$$

Induktionsanfang: $\boxed{n = \alpha}$

$$Formel(\alpha) = \gamma \cdot k$$

Induktionsschluss: $\boxed{n = n+1}$

$$Formel(n+1) = \gamma \cdot k$$

Es ist zu zeigen,
dass beide Ausdrücke
den Rückschluss
zu $k \in Z$
ermöglichen.

REIHEN – PARTIALSUMME I

Um den Wert einer Reihe (Definition siehe Seite 49)zu bestimmen kann dies entweder mittels der **Partialsumme** oder über den **Grenzwert** geschehen.
Im Falle der Partialsumme wird der zugehörige **Summenwert** bis zu einem **definierten Element** berechnet, d.h. es wird ein „Parzelle“ aus der Reihe herausgetrennt.

Partialsumme:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 + q + q^2 \ldots + q^n}_{\text{Geometrische Reihe}} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Geometrische Reihe *Partialsumme*

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{32}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{32} \cdot \frac{2}{1} = \frac{31}{16}$$

REIHEN – PARTIALSUMME II

Ist der **Startwert** einer Partialsumme **nicht gleich Null**, so existieren 3 Möglichkeiten den Wert der Reihe zu bestimmen:

1) Differenzen von Partialsummen:

$$\sum_{k=3}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-0{,}5^7}{1-0{,}5} - \frac{1-0{,}5^3}{1-0{,}5} = \frac{127}{64} - \frac{7}{4} = \frac{15}{64}$$

2) Subtraktion der fehlenden Elemente:

$$\sum_{k=3}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1-0{,}5^7}{1-0{,}5} - 1\frac{3}{4} = \frac{15}{64}$$

3) Verschiebung der Grenzen

$$\sum_{k=3}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+3} = \frac{1}{8}\cdot\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{8}\cdot\frac{1-0{,}5^4}{1-0{,}5} = \frac{15}{64}$$

AUFGABEN

I. Erstellen Sie bei den gegebenen Reihen die Formeln der Partialsumme, in dem Sie alle möglichen Verfahren anwenden.

1) $\sum_{k=3}^{8} \left(\frac{3}{4} \right)^{k}$

2) $\sum_{k=2}^{5} \left(\frac{1}{3} \right)^{k+2}$

3) $\sum_{k=4}^{6} 4 \cdot 0{,}5^{k-2}$