MATHEMATIK

07.12.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was versteht man unter der Monotonie einer Folge?
- ✓ Welche 3 wesentlichen Schritte benötigt man zum Beweisen?
- ✓ Worauf beruht das Quotientenverfahren bzw. die Differenzenmethode?
- ✓ Wann ist eine Folge beschränkt?
- ✓ Was bedeutet die Konvergenz einer Folge?
- ✓ Wie berechnet man den Grenzwert einer Folge?
- ✓ Was versteht man unter der intuitiven Darstellung?
- ✓ Wie wird eine Folge explizit definiert?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wiederholungsaufgaben zur Konvergenz von Folgen
- ✓ Wie berechnet man die Monotonie einer rekursiven Folge?
- ✓ Wie erfolgt der rekursive Schrankenbeweis?
- ✓ Worin unterscheidet sich der Beweis zu einer expliziten Folge?
- ✓ Worauf basiert die Konvergenz?
- ✓ Wie kann man den Grenzwert einer rekursiven Folge bestimmen?
- ✓ Wozu benötigt man hier die Substitution?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN I

1. Geben Sie zu den gegebenen Folgen die explizite Darstellung an und beweisen diese mittels vollständiger Induktion.

a) $x_{n+1} = \frac{4x_n+1}{2};\ x_1 = 0{,}5$

b) $y_{n+1} = 0{,}5 + y_n;\ y_1 = \frac{1}{3}$

c) $z_{n+1} = \frac{z_n}{2};\ z_1 = 2$

AUFGABEN II

2) Bestimmen Sie zu den gegebenen Folgen deren Monotonieverlauf und die zugehörigen Schranken und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion. Begründen Sie ferner die Konvergenz der Folgen und berechnen deren Grenzwert.

a) $$a_n = \frac{n-3}{2n}; n \geq 1$$

b) $$a_n = 3 + \left(\frac{2}{5}\right)^n; n \geq 0$$

REKURSIVE FOLGEN I

Auch bei einer **rekursiv** definierten Folge erfolgt der Beweis der Konvergenz mittels des **Monotoniebeweis** (Seite 155) und dem **Schrankenbeweis** (Seite 160).
Da diese Folge jedoch direkt von mind. einem Vorgängerelement abhängig ist, existieren einige wesentliche Unterschiede im Bereich der **Beweisführung**:

1) Im Bereich der Monotonie muss nach dem Induktionsschluss die gestellte **Behauptung** als Lösung **herauskommen**.

2) Bei den Schranken wird die Behauptung vorausgesetzt und mittels elementarer Umformungen die **Ausgangsfolge** erzeugt.

3) Der Grenzwert wird mittels **Substitution** berechnet, in dem man voraussetzt, dass das Element an der Stelle **n** und (**n+1**) für n gegen unendlich **identisch** ist.

REKURSIVE FOLGEN II

Beispiel: $a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + a_n^2}; a_1 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + a_1^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{12} > \frac{1}{4}$$

<u>Monotonie</u>: $a_{n+1} > a_n$ (*Behauptung – monoton steigend)*)

$$n = 1: a_2 > a_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{17}}{12} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{17} > 3$$

$$n = n+1: a_{n+2} > a_{n+1}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + a_{n+1}^2} > \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + a_n^2} \qquad | \cdot 3; \uparrow^2$$

$$1 + a_{n+1}^2 > 1 + a_n^2 \qquad | -1; \sqrt{}$$

$$a_{n+1} > a_n$$

REKURSIVE FOLGEN III

Beispiel: $a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + a_n^2}; a_1 = \frac{1}{4}$

<u>Schranken</u>:

Da die Folge streng monoton steigt, muss $a_1 = \frac{1}{4}$ untere Schranke sein.

$a_n < 1$ (*Behauptung - obere Schranke*)

$\frac{1}{3}\cdot$

$$n = 1 : a_1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < 1$$

$$n = n + 1 :$$

$$a_n < 1 | \uparrow^2 \Leftrightarrow a_n^2 < 1^2 \;| +1 \Leftrightarrow 1 + a_n^2 < 1^2 + 1 = 2 \,|\, \sqrt{}$$

$$\sqrt{1 + a_n^2} < \sqrt{2} \,|\cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 + a_n^2} < \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$$

REKURSIVE FOLGEN IV

Beispiel: $a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+a_n^2}; a_1 = \frac{1}{4}$

<u>Konvergenz</u>:

Da die Folge streng monoton steigt, und durch $a_{n+1} \in \left[\frac{1}{4};1\right[$ beschränkt ist, ist sie konvergent und der Grenzwert existiert.

<u>Grenzwert:</u>

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) \wedge \lim_{n\to\infty}(a_n) = \alpha}$$

Substitution

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+\alpha^2} \mid \cdot 3; \uparrow^2$$

$$9\alpha^2 = 1+\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \sqrt{\frac{1}{8}} \in \left[\frac{1}{4};1\right[$$

AUFGABEN III

1) Begründen Sie, dass die gegebenen Folgen konvergent sind Folgen und berechnen deren Grenzwert.

a) $$a_{n+1} = -\frac{1}{3} \cdot (3 - 2a_n); a_1 = 3$$

b) $$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{3}\right)^3 + 2; a_1 = 0$$