MATHEMATIK

01.12.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Welche Beweisverfahren kennen Sie?
- ✓ Für welche Zahlen ist eine Folge generell definiert?
- ✓ Was bedeutet vollständige Induktion?
- ✓ Was macht man am Induktionsanfang?
- ✓ Was wird bei der Prämisse gemacht?
- ✓ Wie erfolgt der Induktionsschluss?
- ✓ Worin liegt der Trick bei der vollständigen Induktion?
- ✓ Wie beweist man die Teilbarkeit einer Folge?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was versteht man unter einer Folge?
- ✓ Was versteht man unter der intuitiven Darstellung?
- ✓ Wie erfolgt die explizite Definition einer Folge?
- ✓ Wie beweist man die Monotonie einer Folge?
- ✓ Wie zeigt man die Gültigkeit von Schranken?
- ✓ Was bedeutet die Konvergenz einer Folge?
- ✓ Wie berechnet man den Grenzwert einer Folge?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

FOLGEN I

Eine Funktion, die jeder **natürlichen Zahl** $n \in N$ eine **reelle Zahl** der Form $a(n) \in R$ **zuordnet**, wird als **reelle Folge** bezeichnet.
Somit wird durch eine Folge beschrieben auf welche Art und Weise verschiedene Objekte **nacheinander aufgeführt** werden.
Die **Ausprägung** an der n-ten Stelle nennt man **n-tes Folgeglied** a_x .

- Explizite Definition: direkte Abhängigkeit von der **Variablen** $n \in N$

$$a_n = n^2 \to 1;4;9;...;n^2 : a_5 = 5^2 = 25$$

- Rekursive Definition: direkte Abhängigkeit von den **Vorgängerelementen** a_{n-x}

$$a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}; n \geq 3 \wedge a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \cdot a_1 = 1 + 2 = 3$$

$$a_4 = a_3 + 2 \cdot a_2 = 3 + 2 = 5$$

FOLGEN II

Betrachtet man die Zahlenfolge der ungeraden natürlichen Zahlen, so lässt sich diese in der intuitive als $a_n = 1; 3; 5; 7; 9$ ... definieren.

- Die Zahlenfolge kann als explizite (induktive) Form auch als $b_n = 2n - 1$ dargestellt werden, wobei jedes Element direkt von der Position *n* abhängig ist.

$$b_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

- Für die rekursive Darstellung betrachtet man die Folgenglieder bzw. deren Abstände und untersucht die zugrundeliegende Struktur.
  Dadurch erhält man $c_{n+1} = c_n + 2$ mit dem Startelement $c = 1$.

$$c_5 = c_4 + 2 = 7 + 2 = 9$$

$$c_4 = c_3 + 2 \wedge c_3 = c_2 + 2 \wedge c_2 = c_1 + 2$$
$$c_2 = 3 \wedge c_3 = 5 \wedge c_4 = 7$$

FOLGEN III

Um zu zeigen, dass eine Folge in der expliziten Darstellung gleich mit der rekursiven Darstellung ist, nutzt man das Verfahren der vollständigen Induktion.

Für die Folge der ungeraden Zahlen ergibt sich dadurch:

- Induktionsanfang: $b_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = c_1$ (Startelement der rekursiven Definition)

- Induktionsprämisse: Es wird vorausgesetzt, dass die rekursive und explizite Definition der ungeraden Zahlen für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist.

  $b_n = c_n$

- Induktionsschluss: $b_{n+1} = 2 \cdot (n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$

  $b_{n+1} = (2n - 1) + 2 = b_n + 2$

  Aufgrund der Induktionsprämisse ergibt sich:

  $b_{n+1} = c_n + 2 = c_{n+1}$

AUFGABEN

Gegeben ist die rekursive Darstellung der Folge $a_n = a_{n-1} + 2n + 1;\ a_1 = 2$.

a) Beschreiben Sie die Folge in der intuitiven Form.

b) Geben Sie eine explizite Darstellung an.

c) Beweisen Sie die Gültigkeit mittels vollständiger Induktion.

LÖSUNG

$$a_n = a_{n-1} + 2n + 1;\ a_1 = 2.$$

a) Intuitiven Form:

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 2 + 1 = 7$$
$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 3 + 1 = 14$$
$$a_4 = a_3 + 2 \cdot 4 + 1 = 23$$

$$a_n = 2; 7; 14; 23; 34; 47$$

b) Explizite Darstellung: $a_n = (n+1)^2 - 2$

c) Beweisen Sie die Gültigkeit mittels vollständiger Induktion.

$$a_{n+1} = a_n + 2 \cdot (n+1) + 1 = \left((n+1)+1\right)^2 - 2$$

$$a_n + 2n + 3 = (n^2 + 4n + 4) - 2$$

$$(n+1)^2 - 2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 2$$

$$(n^2 + 2n - 1) + 2n + 3 = n^2 + 4n + 2$$

$$0 = 0$$

MONOTONIE UND SCHRANKEN

Da es sich bei einer reellen Zahlenfolge durch die **Beschränkung** der Eingabevariablen auf die natürliche Zahlenmenge um eine Art **vereinfachte Funktion** handelt, können folgende **Eigenschaften** näher beschrieben werden:

- Monotonie: Es wird **allgemeingültig** bewiesen, ob die Folge **steigt** oder **fällt**.

(streng) monoton
- steigend $\longrightarrow (a_{n+1} > a_n) \vee a_{n+1} \geq a_n$
- fallend $\longrightarrow (a_{n+1} < a_n) \vee a_{n+1} \leq a_n$

- Schranken: Die Folge verläuft innerhalb der **bewiesenen Grenzen**.

obere / untere → Schranke

$a_n \leq k \longrightarrow$ *Supremum*

$a_n \geq k \longrightarrow$ *Infimum*

METHODIK MONOTONIEBEWEIS

1) Tendenz: Berechnung der ersten beiden Elemente

2) Verifizierung: Berechnung des 3. Elements (Bestätigung)

3) Behauptung: $a_{n+1} > a_n$ (steigend) bzw. $a_{n+1} < a_n$ (fallend)

4) Induktionsanfang: $n = 1 \Rightarrow \quad a_2 > a_1$ bzw. $a_2 < a_1$

5) Induktionsschluss: $n = n+1 \Rightarrow \quad a_{n+2} > a_{n+1}$ bzw. $a_{n+2} < a_{n+1}$

MONOTONIE I

Um das **Monotonieverhalten** und die **Schranken** zu beweisen, nutzt man das Verfahren der vollständigen **Induktion**, wobei eine steigende Folge stets den **Startwert** als untere Schranke und eine fallende diesen als obere Schranke besitzt.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n} \cdot (1-4n); n \geq 1$

$$a_1 = 1 \cdot (1-4) = -3 \wedge a_2 = \frac{1}{2} \cdot (1-8) = -3\frac{1}{2}$$

<u>Behauptung</u>: Die Folge ist streng monoton fallend $a_{n+1} < a_n$

<u>Induktionsanfang</u>: $n = 1 : a_2 < a_1 \Rightarrow -3\frac{1}{2} < -3$

MONOTONIE II

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n} \cdot (1-4n); n \geq 1$

<u>Induktionsschluss</u>:

Vorausgesetzt wird, dass die Folge streng monoton fallend ist.

$n = n+1:$ *einsetzen in die Behauptung*

$$a_{(n+1)+1} < a_{(n+1)} \Leftrightarrow a_{n+2} < a_{n+1}$$

$$\frac{1}{n+2} \cdot \left(1-4\cdot(n+2)\right) < \frac{1}{n+1} \cdot \left(1-4\cdot(n+1)\right) \qquad |\cdot(n+1)(n+2)$$

$$(-4n-7)(n+1) < (-4n-3)(n+2)$$

$$-4n^2 - 11n - 7 < -4n^2 - 11n - 6 \qquad |+4n^2 + 11n + 7$$

$0 < 1 \longrightarrow$ *streng monoton fallend*

MONOTONIE III

Um effektiv an die richtige Monotonie zu kommen, kann man entweder die ersten paar Elemente bestimmen und anschließend die Behauptung generieren oder man nutzt die Formeln für die steigend ($a_{n+1} > a_n$) bzw. für fallend ($a_{n+1} < a_n$).

<u>Quotientenverfahren</u>: steigend = $a_{n+1} > a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

fallend = $a_{n+1} < a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

<u>Differenzenmethode</u>: steigend = $a_{n+1} > a_n \rightarrow a_{n+1} - a_n > 0$

fallend = $a_{n+1} < a_n \rightarrow a_{n+1} - a_n < 0$

BEISPIEL MONOTONIE

Für die zuvor im Beispiel genutzte Formel ergibt sich somit:

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot (1 - 4n) = \frac{1-4n}{n} \text{ und } a_{n+1} = \frac{1-4\cdot(n+1)}{n+1} = \frac{-4n-3}{n+1}$$

<u>Quotientenverfahren</u>:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{-4n-3}{n+1}}{\frac{1-4n}{n}} = \frac{-4n-3}{n+1} \cdot \frac{n}{1-4n} = \frac{-4n^2-3n}{-4n^2-3n+1} \approx \frac{\gamma}{\gamma+1} < 1$$

Da der Nenner von $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ immer um ein größer ist als der Zähler ist der Quotient stets kleiner als 1 ist muss die Folge fallend sein.

<u>Differenzenmethode</u>:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-4n-3}{n+1} - \frac{1-4n}{n} = \frac{(-4n^2-3n)-(-4n^2-3n+1)}{n^2+n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{n^2+n} < 0 \textit{ (fallend)}$$

METHODIK SCHRANKENBEWEIS

1) <u>Folgerung</u>: Ist die Folge steigend / fallend, so ist a_1 untere / obere Schranke.

2) <u>Schrankenwert</u>: Vermutung oder Berechnung der *optimalen Schranke* (β).

3) <u>Behauptung</u>: $a_n < \beta$ (obere Schranke) bzw. $a_n > \beta$ (untere Schranke)

4) <u>Induktionsanfang</u>: $n = 1 \Rightarrow \quad a_1 < \beta$ bzw. $a_1 > \beta$

5) <u>Induktionsschluss</u>: $n = n + 1 \Rightarrow \quad a_{n+1} < \beta$ bzw. $a_{n+1} > \beta$

SCHRANKEN

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n} \cdot (1-4n); n \geq 1$

Da die Folge streng monoton fallend ist, muss der Startwert $a_1 = -3$ obere Schranke sein.

<u>Behauptung</u>: -4 ist eine untere Schranke $a_n > -4$

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 1 : a_1 > -4 \Rightarrow -3 > -4$

<u>Induktionsschluss</u>:

Vorausgesetzt wird, dass -4 eine untere Schranke ist.

$n = n+1 :\Rightarrow a_{n+1} > -4$ *einsetzen in die Behauptung*

$$\frac{1}{n+1} \cdot (1 - 4 \cdot (n+1)) > -4 \qquad | \cdot (n+1)$$

$$-4n - 3 > -4n - 4 \qquad | +4n + 4$$

$1 > 0 \longrightarrow$ *-4 ist untere Schranke*

KONVERGENZ

Eine Folge ist **konvergent**, d.h. nähert sich einem bestimmten Wert an, sofern sie zum einen (streng) **monoton** steigend **oder** fallend ist und zum anderen eine obere **und** untere Schranke besitzt, demzufolge **beschränkt** ist.

Der Wert, dem sich die Folge im **Unendlichen** nähert, wird auch als **Grenzwert** bezeichnet und es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \alpha$ *(Limes der Folge)*

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n} \cdot (1-4n); n \geq 1$

Da die Folge streng monoton fallend ist (siehe Seite 150 ff.) und durch die beiden Schranken -3 und -4 beschränkt ist (siehe Seite 154), muss sie auch konvergent sein und der Grenzwert existieren.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \cdot (1-4n)\right) = \left[\frac{1}{\infty} - 4\right] = [0-4] = -4$$

AUFGABEN II

1) Bestimmen Sie zu den gegebenen Folgen deren Monotonieverlauf und die zugehörigen Schranken und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.
   Begründen Sie ferner die Konvergenz der Folgen und berechnen deren Grenzwert.

a) $a_n = \frac{3n}{2n+1}; n \geq 1$

b) $a_n = 2 \cdot \sqrt[n]{n}; n \geq 3$