MATHEMATIK

24.11.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie wird die Teilbarkeitsrelation definiert?
- ✓ Welche Eigenschaften besitzt die Teilbarkeit?
- ✓ Was bedeutet der ggT(Zahl_1, Zahl_2)?
- ✓ Wofür braucht man das kgV(Zahl_1, Zahl_2)?
- ✓ Wie ist eine Primzahl definiert?
- ✓ Was ist die kanonische Darstellung als Produkt einer Zahl?
- ✓ Wie nutzt man die Primfaktorzerlegung für ggT / kgV?
- ✓ Wie funktioniert der euklidische Algorithmus?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben zu der Zahlentheorie.
- ✓ Was versteht man unter einer Zahlenfolge?
- ✓ Was ist der Induktionsanfang?
- ✓ Wie ist der Induktionsschluss aufgebaut?
- ✓ Warum funktioniert die vollständige Induktion?
- ✓ Wie zeigt man die allgemeine Gültigkeit einer Ungleichung?
- ✓ Wie beweist man die generelle Teilbarkeit?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1. Berechnen Sie das ggT mit dem Euklidischen Algorithmus und bestimmen das kgV durch die vorhandenen Primfaktoren.

a) $a = 4.200 \wedge b = 43.120$

b) $a = 2.772 \wedge b = 145.530$

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION I

Eine von *n* abhängige **Aussage** *A(n)* sei für alle **natürlichen Zahlen** definiert.
Um zu zeigen, dass der Ausdruck / Term für jedes beliebige n **gültig** ist, nutzt man das **Beweisverfahren** der **vollständigen Induktion** durch die folgenden beiden Schritte:

1. <u>Induktionsanfang:</u>

   Es wird geprüft, ob die Aussage für das 1. Element stimmt.

   $$\boxed{\mathrm{A(1.Element)\,ist\ wahr}}$$

2. <u>Induktionsschluss:</u>

   Es wird vorausgesetzt, dass A(n) wahr ist und man zeigt, dass die Aussage dann auch an der Stelle (n+1) gültig ist.

   $$\boxed{\mathrm{Prämisse: A(n)\,ist\ wahr} \Rightarrow \mathrm{A(n+1)\,ist\ wahr}}$$

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION II

<u>Beispiel (Folgen)</u>: $(n+1)! > 3^n; n > 3$

1. Induktionsanfang: $n = 4 : (4+1)! > 3^4 \Leftrightarrow 5! > 3^4 \Leftrightarrow 120 > 81$

2. Induktionsschluss: Es wird vorausgesetzt, dass $(n+1)! > 3^n$ für alle n>3 gültig ist.

$n = n+1:$

$((n+1)+1)! > 3^{n+1} \Leftrightarrow (n+2)! > 3^{n+1}$

$(n+1)! \cdot (n+2) > 3^n \cdot 3^1$

auseinanderziehen

einsetzen

$3^n \cdot (n+2) > 3^n \cdot 3 \Leftrightarrow n+2 > 3 \Leftrightarrow n > 1$

$(n+1)! \cdot (n+2) > (n+1)! \cdot 3 \Leftrightarrow n+2 > 3 \Leftrightarrow n > 1$

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION III

Beispiel (Teilbarkeit): $n^2 - n; n > 1$ *ist durch 2 teilbar*

1. Induktionsanfang:

   $n = 2:$

   $2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 = 2 \cdot k; k \in Z$

2. Induktionsschluss:

   Es wird vorausgesetzt, dass $n^2 - n$ für alle n>1 durch 2 teilbar ist.

   $n = n + 1:$

   $(n+1)^2 - (n+1) = (n^2 + 2n + 1) - (n+1) = n^2 + n$

   $(n^2 - n) + 2 \cdot n = 2 \cdot k_1 + 2 \cdot n = 2 \cdot (k_1 + n) = 2 \cdot k_2;$

   $n > 1 \wedge k_x \in Z$

AUFGABEN

Zeigen Sie mittels dem Verfahren der vollständigen Induktion, dass die folgenden Aussagen bzw. Zusammenhänge gültig sind:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1+\frac{n}{2}$

b) $1+n\cdot\gamma \leq (1+\gamma)^n ; \gamma \in R \wedge n \geq 0$

c) $n^3 - 4n; n \geq 1$

ist durch 3 teilbar

d) $3^{2n} + 7; n \geq 0$

ist durch 8 teilbar