MATHEMATIK

23.11.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was bedeutet die Rechtseindeutigkeit einer Relation?
- ✓ Was weiß man von einer surjektiven Funktion?
- ✓ Wann ist eine Funktion total / partiell?
- ✓ Welche Bedeutung hat die Eigenschaft injektiv?
- ✓ Wie kann man eine Funktion bijektiv machen?
- ✓ Wie berechne ich die Umkehrfunktion mathematisch?
- ✓ Was ist die Komposition einer Funktion?
- ✓ Welche Arten der Symmetrie können entstehen?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben zu Eigenschaften von Funktionen.
- ✓ Was kann man aufgrund der Teilbarkeit folgern?
- ✓ Wie ist der größte gemeinsame Teiler definiert?
- ✓ Wie funktioniert der Euklidische Algorithmus?
- ✓ Wie funktioniert die Primfaktorzerlegung?
- ✓ Was haben Primzahlen mit dem kgV zu tun?
- ✓ Wie werden Intervalle definiert?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN FUNKTION

1. Gegeben sind die folgenden Relationen.

   - Machen Sie aus ihnen eine bijektive Funktion
   - Bestimmen Sie die zugehörigen Umkehrfunktion

   a) $\lambda = \{(x,y) \in N \times N \mid \mathrm{y} = x^2 - 8x + 22\}$ b) $\phi = \{(x,y) \in R \times R \mid \mathrm{y} = \frac{4}{x^2 - 8} - 4\}$

2. Zerlegen Sie die folgende Funktion in ihre Bestandteile und geben mindestens 3 weitere Kompositionen und deren Definitions- und Wertebereich an.

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{(x-3)^3}}\right)$$

3. Geben Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an, beweisen das Symmetrieverhalten und fertigen eine grobe Skizze an.

   a) $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{3}{2}$ b) $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = -\frac{2}{2\mathrm{x} - \mathrm{x}^3}$ c) $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = 10^{2x^2 - 8}$

PEANO-AXIOME

Guiseppe Peano (italienischer Mathematiker) formulierte 1889 fünf Axiome sprich Grundsätze einer Theorie, durch die die Eigenschaften der natürlichen Zahlenmenge exakt und mathematisch beschrieben werden.

1. Null ist die kleinste natürliche Zahl: $0 \in \mathbb{N}$
2. Der Nachfolger einer natürlichen Zahl ist ebenfalls eine natürliche Zahl: $n \in \mathbb{N} \leftrightarrow n' \in \mathbb{N}$
3. Die Null ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl: $n \in \mathbb{N} \rightarrow n' \neq 0$
4. Jede natürliche Zahl hat nur einen Nachfolger, der eindeutig bestimmt ist: $n; m \in \mathbb{N} \rightarrow (n' = n' \Rightarrow n = m)$
5. Die natürlichen Zahlen enthalten nur die Null und alle ihre Nachfolger: $0 \in X \wedge (n; n') \in X \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X$

TEILBARKEIT

Eine ganze Zahl *a* ist dann durch eine ganze Zahl *b* teilbar, wenn das Ergebnis *q* der Division ebenfalls eine ganzen Zahlen ist, so dass man die Teilbarkeitsrelation wie folgt definieren kann:

$$| = \{(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in Z \times Z \mid b = q \cdot a; q \in Z\}$$

In der Mathematik nutzt man anstelle von $(a, b) \in |$ primär die Infix-Notation $a|b$ (gesprochen: *a* teilt *b*).

Daraus ergeben sich die folgenden Regeln / Zusammenhänge:

- Transitivität: $a|b \ \wedge b|c \quad \rightarrow a|c$
- Kürzbarkeit: $c \cdot a|c \cdot b \quad \rightarrow a|b; c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
- Produktregel: $a|b \ \wedge c|d \quad \rightarrow a \cdot c|b \cdot d$
- Linearität: $a|b_1 \ \wedge a|b_2 \quad \rightarrow a|m \cdot b_1 + n \cdot b_2; m, n \in \mathbb{Z}$

DIVISION MIT REST

Bei einer ganzzahligen Division mit Rest werden zwei Zahlen $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{a} \neq 0$ betrachtet. Bei der Division entstehen immer zwei eindeutige Zahlen $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathbb{Z}$, so dass die größere Zahl *b* stets als *Produkt + Rest* beschrieben werden kann.

$$b = q \cdot a + r \quad mit \quad 0 \leq q < |a|$$

Als ganzzahlige Division von *b* und *a* erhält man demzufolge *q* und es gilt: $\frac{b}{Z^a} = q$

Diese Definition des Rests haben wir bereits auf Seite 7 mit der Modulo-Operation kennen gelernt. Bei der Modulo-Operation erhalten wir nur den Rest der Division.

Beispiel: $a = 8; b = 115$

$$115 = 112 + 3 = 14 \cdot 8 + 3 \Rightarrow q = 14, r = 3$$

Es gilt demzufolge: $\frac{115}{Z^8} = 14$ und $115\ mod\ 8 = 3$

Größter gemeinsamer Teiler

ggT: größter gemeinsamer Teiler:

Beim größten gemeinsamen Teiler sucht man die größtmögliche natürliche Zahl, die zwei oder mehr Zahlen ganzzahlig teilt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $d|a$ und $d|b$, wodurch *d* ein gemeinsamer Teiler von *a* und *b* sein muss.
Wenn jetzt für jeden anderen gemeinsamen Teiler *c* von *a* und *b* gilt, dass c$|d$, dann ist *d* auch der größte gemeinsame Teiler von *a* und *b*:

$$d = ggT(a, b)$$

Haben zwei Zahlen als größten gemeinsamen Teiler nur die eins, so dass $ggT(a, b) = 1$ gilt, so sind die Zahlen teilerfremd.

KLEINSTES GEMEINSAMES VIELFACHES

kgV: kleinstes gemeinsames Vielfaches:

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Pendant zum zuvor definierten ggT.

Es wird hier eine möglichst kleine natürliche Zahl gesucht, die das Vielfache zweier Zahlen darstellt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $a|d$ und $b|d$, wodurch *d* ein gemeinsames Vielfaches von *a* und *b* sein muss.
Wenn jetzt für jedes andere gemeinsame Vielfache *c* von *a* und *b* gilt, dass $d|c$, dann ist *d* auch das kleinste gemeinsame Vielfache von *a* und *b*:

$$d = kgV(a, b)$$

Für die Berechnungen des ggT(a,b) und auch kgV(a,b) nutzt man u.a. das Verfahren der Primfaktorzerlegung.

PRIMFAKTORZERLEGUNG I

Primzahl:

Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist eine Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist: $P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \dots\}$

Primfaktorzerlegung:

Eine natürliche Zahl $p > 1$ kann als Produkt von Primzahlen dargestellt werden. Sortiert man diese Primfaktoren, so erhält man die kanonische Darstellung.

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$$

Für die Zerlegung faktorisiert man die Ausgangszahl und startet bei der kleinsten Primzahl und fass anschließend gleiche Faktoren zusammen.

$$504 = 2 \cdot 252 = 2 \cdot 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2^3 \cdot 63$$
$$63 = 3 \cdot 21 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$$

$$\Rightarrow 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

PRIMFAKTORZERLEGUNG II

Anwendung auf ggT(a,b) und kgV(a,b):

Im ersten Schritt zerlegt man die zu betrachtenden Zahlen in deren Primfaktoren.

$$160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^5 \cdot 5$$
$$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$$

ggT - Bestimmung:

Zur Berechnung des ggT fasst man die gleichen Primfaktoren als Produkt zusammen:

$$\Rightarrow ggT(160{,}144) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

kgV - Bestimmung:

Zur Berechnung des kgV nimmt man die am häufigsten vorkommenden Primfaktoren und setzt diese zu einem Produkt zusammen:

$$\Rightarrow kgV(160{,}144) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 32 \cdot 9 \cdot 5 = 1.440$$

AUFGABEN

1. Zerlegen Sie die gegebenen Zahlen im ersten Schritt in deren Primfaktoren und bestimmen anschließend den größten gemeinsamen Teiler ggT sowie das kleinste gemeinsame Vielfache kgV.

a) $\mathrm{a}=3.528 \wedge \mathrm{b}=3.780$

b) $\mathrm{a}=776.160 \wedge \mathrm{b}=2.494.800$

c) $\mathrm{a}=1.008 \wedge \mathrm{b}=1.080 \wedge c=2.940$

EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, kann man den ggT(a,b) einfach bestimmen.

Es gilt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$

1. Berechnung der ganzzahligen Division mit Rest: $b = q \cdot a + r \quad mit \quad 0 \leq q < |a|$

2.1. Ist $r \neq 0$, dann ersetze $b \coloneqq a$ und $a \coloneqq r$ und Starte wieder bei 1.

2.2. Ist $r = 0$, dann ist a der gesuchte Wert vom ggT(a,b).

Beispiel: $ggT(1.264\,,\ 616)$

$$
\begin{aligned}
1.264 \quad &= 2 \cdot 616 + 32 \\
616 \quad &= 19 \cdot 32 + 8 \\
32 \quad &= 4 \cdot 8 + 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow ggT(1.264\,, 616) = 8$

AUFGABEN

1. Wenden Sie bei den folgenden Aufgaben den Euklidischen Algorithmus an und bestimmen somit den ggT.

a) $a = 840 \wedge b = 980$

b) $a = 975 \wedge b = 2.340$

c) $a = 96.096 \wedge b = 1.092$