MATHEMATIK

17.11.2017

VOKABELN DER RELATIONEN

1) Relation
2) Domain
3) linkstotal
4) symmetrisch
5) irreflexiv
6) rechtstotal
7) Äquivalenzrelation
8) antisymmetrisch
9) verbale Bedingung
10) totale Relation
11) reflexiv
12) transitiv
13) mathematische Bedingung
14) partiell
15) Range
16) Definition einer Relation
17) Äquivalenzklassen
18) asymmetrisch
19) Beweis mittels Widerspruch
20) Ordnungsrelation

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann spricht man von einer Äquivalenzrelation?
- ✓ Was ist eine Äquivalenzklasse?
- ✓ Was bedeutet die Eigenschaft eines Repräsentanten?
- ✓ Nennen Sie zwei Beispiele einer Äquivalenzrelation?
- ✓ Welchen Vorteil bringt eine Ordnungsrelation?
- ✓ Nennen Sie zwei Beispiele einer Ordnungsrelation?
- ✓ Wie können Sie eine totale Relation beweisen?
- ✓ Was dürfen Sie verändern um eine totale Relation zu erhalten?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wann spricht man von einer Funktion?
- ✓ Wie hängt eine Funktion mit der Relation zusammen?
- ✓ Was bedeutet der Begriff surjektiv?
- ✓ Was versteht man unter injektiv?
- ✓ Warum ist nur eine bijektive Funktion umkehrbar?
- ✓ Wie kann man die Eigenschaften grafisch begründen?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Geben Sie zu den folgenden Relationen alle relevanten Eigenschaften an, beweisen Sie diese und geben die Art der Relation an.

a) $\therefore = \{(a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} |\ 2 \cdot a \leq 2 \cdot b + 1\}$

b) Gegeben sei die Menge $\mathrm{M} = \{x \in \mathbb{Z}^{>0} | x mod 2 = 0\}$ (geraden, positiven Zahlen).

$$\varDelta = \left\{(x; y) \in \mathrm{M} \times \mathrm{M} |\ \frac{x}{y} = \beta^2; \beta \in \mathbb{N}_0\right\}$$

FUNKTION I

Um eine Relation weiter klassifizieren zu können, wird die **Eindeutigkeit** der Zuordnung näher untersucht. D.h. es wird der **direkte Zusammenhang** zwischen der ersten und zweiten Komponente eines **jeden Tupels** beschrieben.

Funktion:
Wird die rechte Koordinate einer Relation eindeutig bestimmt, so ist die Relation **rechtseindeutig** und man spricht von einer Funktion.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P} \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B} : (\mathrm{a}, \mathrm{b}_1) \in P \wedge (a, b_2) \in P \\ f : A \to B : f(a) = b_1 \wedge f(a) = b_2 \end{array}\right\} \quad \mathrm{b}_1 = b_2$$

Funktion

$$\mathrm{DOM(P)} = \mathrm{D_f} \subset A \Rightarrow \text{partiell (nicht linkstotal)}$$

$$\mathrm{DOM(P)} = \mathrm{D_f} = A \Rightarrow \text{total (linkstotal)}$$

FUNKTION II

Sofern eine Relation **nicht rechtseindeutig** ist, so spricht man lediglich von einer **Abbildung**, d.h. zu einem linken Wert gehören mehrere rechte Werte.

Es entstehen dadurch folgende **<u>Zusammenhänge</u>**:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{Kartesisches Produkt} & \\
 & \downarrow & \\
 & \text{Relation} & \\
\swarrow & & \searrow \\
\text{Funktion} & & \text{Abbildung}
\end{array}
$$

FUNKTION III

Im Bereich der **Funktionen / Abbildungen** können folgende **Eigenschaften** bzgl. der **Eindeutigkeit** und **Definitions- / Wertebereiche** untersucht werden:

✓ rechtseindeutig: **Funktion** $f(a)=b_1 \wedge f(a)=b_2 \Rightarrow b_1=b_2$

Eine Parallele zur y-Achse schneidet den Graphen max. einmal.

✓ linkseindeutig: **injektiv / eineindeutige Funktion** $f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$

Eine Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen max. einmal.

✓ rechtstotal: **surjektiv / Wertebereich** $RAN\left(f\right)=B \wedge f(a)=b$

Alle Werte auf der y-Achse (Menge B) werden erreicht.

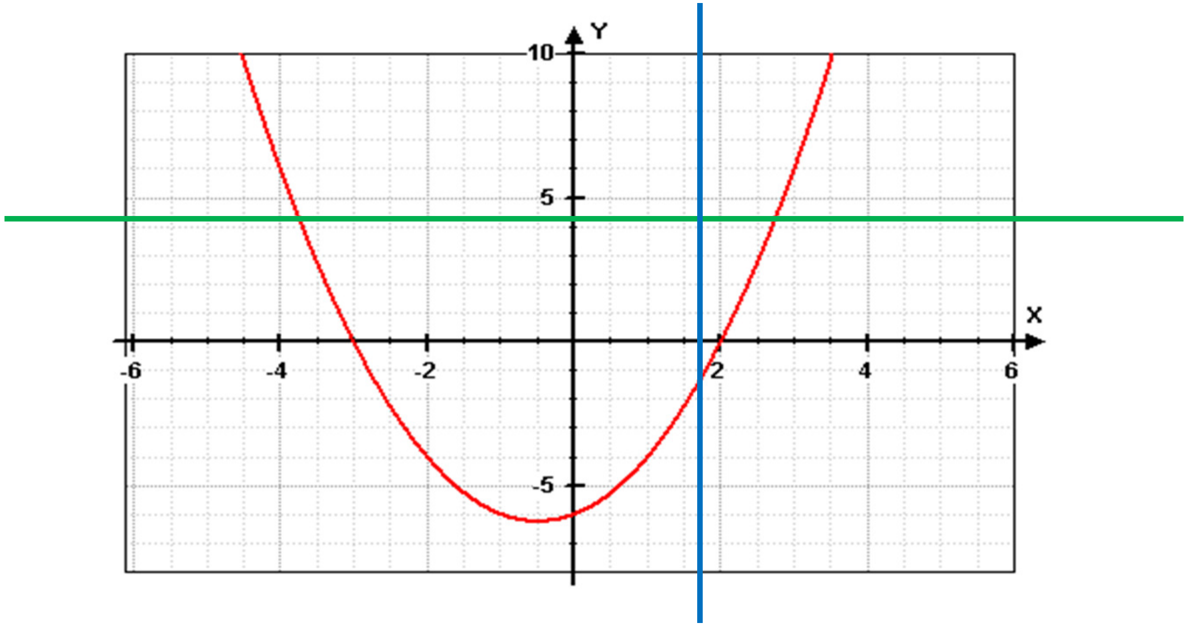
✓ linkstotal: **total / Definitionsbereich** $DOM\left(f\right)=A \wedge f(a)=b$

Alle Werte von der x-Achse (Menge A) dürfen genutzt werden.

Treffen alle Eigenschaften **gleichzeitig** zu, handelt es sich um eine **bijektive Funktion**.

FUNKTION IV

Beispiel: $\psi = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + x - 6\} \Leftrightarrow f(x) = x^2 + x - 6$



Es handelt sich um eine Funktion (**rechtseindeutig**), die auch total (**linkstotal**) ist. Da die Parallele zur x-Achse den Graphen mehr als einmal schneidet ist sie **nicht injektiv** und da der Wertebereich nicht ganz reelen Zahlen darstellt ist sie auch **nicht surkjektiv**.

AUFGABEN FUNKTION I

1. Untersuchen Sie die folgenden Relationen im Hinblick auf die Eigenschaften einer Funktion und fertigen eine grobe Skizze an.
   Passen Sie die Relation ggf. so an, dass eine bijektive Funktion entsteht.

a) $\lambda = \{(x, y) \in N \times N \mid \mathrm{y} = 2x - 1\}$

b) $\phi = \{(x, y) \in R \times R^{+} \mid \mathrm{y} = \sqrt{x} + 2\}$

c) $\varpi = \{(x, y) \in R \times R \mid \mathrm{y} = \sin(x) + 1\}$

UMKEHRFUNKTION

Eine Funktion ist nur dann **umkehrbar**, sofern sie **bijektiv** ist, wobei man ggf. den Definitions- und Wertebereich angepasst.
Grafisch gesehen wird die Funktion inkl. beider Achsen an der **1. Winkelhalbierenden gespiegelt**, wodurch der Wertebereich der Ausgangsfunktion zum Definitionsbereich der Umkehrfunktion wird.

Methodik:

$$\psi = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + x - 6\}$$

1. Erzeugung der Bijektivität:

$$\psi = \{(x, y) \in [-0{,}5; \infty[\times [-6{,}25; \infty[\mid y = x^2 + x - 6\}$$

2. Auflösen der Gleichung nach x:

$$y = x^2 + x - 6 = (x + 0{,}5)^2 - 6{,}25 \Leftrightarrow x = \sqrt{y + 6{,}25} - 0{,}5$$

3. Variablentausch:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 6{,}25} - 0{,}5; D_{f^{-1}} = x \in [-6{,}25; \infty[\wedge W_{f^{-1}} = y \in [-0{,}5; \infty[$$

KOMPOSITION

Werden mehrere Ausdrücke **ineinander verschachtelt**, so spricht man von einer **Komposition** von Funktionen.
Diese Art der Verbindung / Verknüpfung von Termen ist **nicht kommutativ.**

Definition:

$$f : A \to B \wedge g : B \to C \quad \begin{cases} g \circ f(a) \Leftrightarrow g(f(a)) \\ f \circ g(b) \Leftrightarrow f(g(b)) \end{cases}$$

Beispiel:

$$f(x) = x^2 - 4 \wedge g(x) = \sin(x) \quad \begin{cases} g(f(x)) = \sin(x^2 - 4) \\ f(g(x)) = (\sin(x))^2 - 4 \end{cases}$$

SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN

Innerhalb der Funktionen werden die beiden möglichen **Symmetriearten** der Achsen- und Punktsymmetrie unterschieden.

Achsensymmetrie:

$$f(x) = f(-x)$$

Bei der Achsensymmetrie wird jeder Punkt direkt an der y-Achse gespiegelt.
(es sind alle Exponenten eines Polynoms gerade)

Punktsymmetrie:

$$f(x) = -f(-x)$$

Bei der Punktsymmetrie wird jeder Punkt direkt am Ursprung gespiegelt.
(es sind alle Exponenten eines Polynoms ungerade)

AUFGABEN FUNKTION II

1. Gegeben sind die folgenden 3 Funktionen.
   Bilden Sie alle möglichen Kompositionen und bestimmen den maximal möglichen Definitions- und Wertebereich.

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

b) $g(x) = 4x^2 + 1$

c) $h(x) = \dfrac{2}{3-x}$