

MATHEMATIK

10.11.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was wird durch eine Relation beschrieben?
- ✓ Worauf basiert jede Relation?
- ✓ Was bedeutet $\text{DOM}(p)$ bzw. $\text{RAN}(p)$?
- ✓ Welche besonderen Typen von Relation existieren?
- ✓ Beschreiben Sie die möglichen Symmetrien einer Relation?
- ✓ Was bedeutet eine verbale / mathematische Relation?
- ✓ Was wird durch total bzw. partiell beschrieben?
- ✓ Wie sieht eine ausschließlich reflexive Relation grafisch aus?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Aufgaben zur Beschreibung einer Relation?
- ✓ Was bedeutet die Art einer Relation?
- ✓ Was ist eine Äquivalenzrelation?
- ✓ Wie kann man eine Äquivalenzrelation beweisen?
- ✓ Was bedeutet eine Ordnungsrelation?
- ✓ Wie kann man eine Ordnungsrelation nachweisen?
- ✓ Methodik zur Klassifizierung einer Relation?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN RELATIONEN IV

- 1) Gegeben sei die Menge $A = \{\text{Alle Kinder in einem Kindergarten}\}$.
Geben Sie alle relevanten Eigenschaften der folgenden Relation an und begründen diese.

$$\delta = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{Kind } a \text{ ist jünger oder gleich alt wie Kind } b\}$$

- 2) Klassifizieren Sie die Relation $\phi = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \mid b = \frac{a}{(42 \cdot x)}, x \in \mathbb{Q}^+ \right\}$.

ARTEN VON RELATIONEN

Entscheidungsbaum

RELATION

reflexiv

transitiv

symmetrisch

antisymmetrisch

Äquivalenzrelation

Ordnungsrelation

Durch diese Form der Relation ist es möglich **Klassen** zu bilden, wobei eine **Äquivalenzklasse** stets der **Ausprägung** eines **Repräsentanten** der Relation entspricht. (siehe Mengenlehre)

Dies Form der Relation ermöglicht es **basierend** auf der **Grundmenge M** eine **geordnete Menge** darzustellen, d.h. die Tupel können in eine **natürliche Reihenfolge** gebracht werden.

METHODIK ZUR KLASSIFIZIERUNG I

$$\text{Symbol} = \underbrace{\{\text{Tupel} \in \text{Kartesischem Produkt} \}}_{\text{Welt}} \mid \underbrace{\text{Formel oder Aussage}}_{\text{Bedingung}}$$

Relation 1: $\Theta = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \geq y\}$

✓ reflexiv: $(a, a) \in \text{Relation}$ für **jedes** $a \in \text{Menge}$

$$(x, x) \in \Theta; x \in \mathbb{N}, \text{ da } x \geq x \text{ gilt.}$$

in Bedingung einsetzen

✓ transitiv: $(a, b) \in \text{Relation}$
 $(b, c) \in \text{Relation}$ } $(a, c) \in \text{Relation}$

$$(x, y) \in \Theta \wedge (y, z) \in \Theta \Rightarrow (x, z) \in \Theta$$

$$\text{da } x \geq y \wedge y \geq z \Leftrightarrow x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq z$$

in Bedingung einsetzen

METHODIK ZUR KLASSIFIZIERUNG II

Relation 1: $\Theta = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \geq y\}$

✓ antisymmetrisch: $(a, b) \in \text{Relation}$
 $(b, a) \notin \text{Relation}$ } außer $a = b$

$$(x, y) \in \Theta \wedge (y, x) \notin \Theta; x \neq y$$

da $x \geq y \wedge y \not\geq x$ außer $x = y$

in Bedingung einsetzen

✓ total: $(a, b) \in \text{Relation} \vee (b, a) \in \text{Relation}$

$$(x, y) \in \Theta \vee (y, x) \in \Theta; x, y \in M$$

da $x \geq y \vee y \geq x$ für alle $x, y \in R$

in Bedingung einsetzen



Totale Ordnungsrelation

METHODIK ZUR KLASSIFIZIERUNG III

$$\text{Symbol} = \underbrace{\{\text{Tupel} \in \text{Kartesischem Produkt}\}}_{\text{Welt}} \mid \underbrace{\{\text{Formel oder Aussage}\}}_{\text{Bedingung}}$$

Relation 2: $\Omega = \{(a, b) \in M \times M \mid \text{Wohn} - \text{Straße}(a) = \text{Wohn} - \text{Straße}(b)\}$

✓ reflexiv: $(a, a) \in \text{Relation}$ für **jedes** $a \in \text{Menge}$

jeder wohnt mit sich in der gleichen Straße.

in Bedingung einsetzen

✓ transitiv: $(a, b) \in \text{Relation}$
 $(b, c) \in \text{Relation}$ } $(a, c) \in \text{Relation}$

wenn Person A und Person B in der gleichen Straße wohnen und dies auch Person B und C tun, so muss auch Person A und C in der gleichen Straße wohnen.

in Bedingung einsetzen

METHODIK ZUR KLASSIFIZIERUNG IV

Relation 2: $\Omega = \{(a, b) \in M \times M \mid \text{Wohn} - \text{Straße}(a) = \text{Wohn} - \text{Straße}(b)\}$

✓ symmetrisch: $(a, b) \in \text{Relation} \Leftrightarrow (b, a) \in \text{Relation}$

wenn eine Person A mit einer Person B in der gleichen Straße wohnt, so gilt dies auch für die Person B (umgekehrt).

in Bedingung einsetzen

✓ total: $(a, b) \in \text{Relation} \vee (b, a) \in \text{Relation}$

für jede Person aus der Menge gilt, dass sie entweder mit einer anderen Person in der gleichen Straße wohnt oder nicht.

in Bedingung einsetzen



Totale Äquivalenzrelation

Klassen:

Eine Klasse entspricht stets der Ausprägung eines Repräsentanten sprich in unserem Fall einer Person.

Also sind die **Äquivalenzklassen** die **Straßen**.

AUFGABEN RELATIONEN III

- 3) Begründen Sie bei den folgenden Definitionen zum einen warum es tatsächlich eine Relation ist und zum anderen um welche Art der Relation es sich dabei handelt.
(Ordnungs-/ Äquivalenzrelation)

a)
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \cdot y_1 \\ \beta \cdot y_2 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

b)
$$\lambda = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b = k \cdot a, k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

- c) Es wird durch eine Relation die PS-Zahl aller PKWs auf dem Campus beschrieben, wobei die PS-Zahl des ersten Autos kleiner oder gleich der PS-Zahl des zweiten Autos sein muss.