MATHEMATIK

03.11.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie kann man in der Wahrheitstabelle effektiv arbeiten?
- ✓ Was ist neutral in der Aussagenlogik?
- ✓ Was bedeutet der Ausdruck *tertium non datur*?
- ✓ Was besagt *präfix*, was beschreibt *postfix*?
- ✓ Was wird durch eine Formelklasse beschrieben?
- ✓ Was ist eine Kontradiktion?
- ✓ Wann existiert eine Äquivalenz?
- ✓ Wie zeigt man eine Folgerung?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was bedeutet es zu formalisieren?
- ✓ Die drei Schritte der Formalisierung.
- ✓ Was ist ein Konjunktions- oder Disjunktionsterm?
- ✓ Was versteht man unter einer Normalform?
- ✓ Was bedeutet konjunktive (KNF) bzw. disjunktive (DNF) Normalform?
- ✓ Wie kann eine KNF oder DNF bestimmen?
- ✓ Was bedeutet in dem Zusammenhang der Begriff kanonisch?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die Formelklassen der folgenden Aussagen und interpretieren diese.

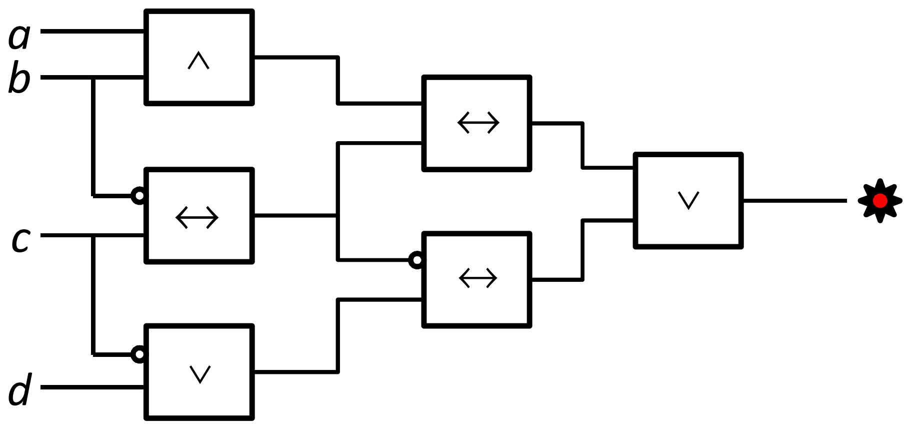
a) $x \vee y \rightarrow \neg(x \vee z) \wedge (y \vee z)$

b) $x \vee y \rightarrow z \leftrightarrow (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$

c) $(a \vee b) \wedge c \rightarrow b$

d) $(a \wedge b) \vee (\neg b \wedge \neg a) \rightarrow c \leftrightarrow b \vee a \rightarrow c$

2) Geben Sie zu der folgenden Schaltung die Erfüllungsmenge an.



FORMALISIERUNG

Variablendefinition:
Im ersten Schritt muss für jeden Zustand oder auch für jeden geschilderten Sachverhalt eine Variable definiert werden.

Aussagendefinition:
Für jede existierende Aussage wird nun mittels der zuvor definierten Variablen eine aussagenlogische Formel generiert.

Formalisierung:
Im letzten Schritt werden die erstellten Formeln miteinander verbunden.
Handelt es sich um ein gleichzeitiges Auftreten der Zustände mittels Bijunktion, bei einer Folgerung (wenn … dann) mit der Subjunktion.

Wahrheitstabellen

BEISPIEL FORMALISIERUNG

Andreas, Benedikt, Carolin und Dora sind auf eine Party eingeladen:

- ✓ Wenn Andreas geht, dann geht auch Benedikt.
- ✓ Carolin und Dora gehen nicht beide.
- ✓ Von Andreas und Dora gehen mindestens einer.
- ✓ Wenn Benedikt oder Dora geht, dann geht auch Carolin.

Es werden demzufolge die folgenden 4 Variablen definiert:

a:	Andreas
b:	Benedikt
c:	Carolin
d:	Dora

BEISPIEL FORMALISIERUNG

<u>Die Aussagen liefern die folgenden Aussagen:</u>

- ✓ Wenn Andreas geht, dann geht auch Benedikt. ⟶ $a \to b$
- ✓ Carolin und Dora gehen nicht beide. ⟶ $\neg(c \wedge d)$
- ✓ Von Andreas und Dora gehen mindestens einer. ⟶ $a \vee d$
- ✓ Wenn Benedikt oder Dora geht, dann geht auch Carolin. ⟶ $(b \vee d) \to c$

BEISPIEL FORMALISIERUNG

Da alle 4 Aussagen gleichzeitig erfüllt sein müssen, erhält man:

$$(a \to b) \land \neg(c \land d) \land (a \lor d) \land (b \lor d \to c)$$

Die dazugehörige Wahrheitstabelle liefert das folgende Ergebnis:

a	W	W	W	W	W	W	W	W	F	F	F	F	F	F	F	F
b	W	W	W	W	F	F	F	F	W	W	W	W	F	F	F	F
c	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F
d	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F
...																
E[A]	**F**	**W**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**

Wie man erkennen kann, geht Andreas, Benedikt und Carolin auf die Party.

AUFGABEN

1) Lösen Sie folgenden Kriminalfall, bei dem nach Ermittlungen bekannt ist:

   ✓Falls *Hugo* und *Esmeralda* nicht beide beteiligt waren, dann ist auch *Fred* außer Verdacht.

   ✓Ist *Esmeralda* schuldig oder *Fred* unschuldig, so kann auch *Hugo* nicht der Täter sein.

   ✓Aber mindestens einer der drei war der Täter.

   Formalisieren Sie dazu zuerst die gegebenen Sachverhalte und bestimmen anschließend mittels Wahrheitstabelle den Mörder.

DEFINITIONEN

Literal:
Jede unterschiedliche Aussagevariable als auch deren Negation bildet ein Literal.

Konjunktionsterm K_i :
Werden verschiedene Literale durch ein $\wedge$ verbunden, so spricht man von einem Konjunktionsterm: $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \wedge x_n$
Enthält dieser alle Variablen der Formel/ Aussage so handelt es sich um einen **Minterm**.

Disjunktionsterm D_i :
Werden verschiedene Literale durch ein $\vee$ verbunden, so spricht man von einem Disjunktionsterm: $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_{n-1} \vee x_n$
Enthält dieser alle Variablen der Formel/ Aussage so handelt es sich um einen **Maxterm**.

Kanonisch:
Unter dem Begriff kanonisch versteht man vollbesetzt, d.h. ein kanonischer Term beinhaltet alle vorhandenen Variablen bzw. Literale.
Er besteht somit ausschließlich aus Min- bzw. Maxtermen.

KNF – KONJUNKTIVE NORMALFORM

Formel:
In der konjunktiven Normalform werden alle Terme mit einer Konjunktion $\wedge$ verbunden, wobei in den Termen ausschließlich die Operatoren $\vee$ und $\neg$ vorkommen dürfen.

$$D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_{i-1} \wedge D_i$$

Methode:
1. Im ersten Schritt bestimmen Sie die Erfüllungsmenge der umzuwandelnden Formel mittels einer Wahrheitstabelle.

2. Jedes *F* in der Lösung muss in der konjunktiven Normalform ein Klammerausdruck erzeugt werden.

3. In dem durch den 2. Schritt bestimmte Eingabemuster wird die Variable, die als Eingabewert ein *W* negiert.

KNF - BEISPIEL

Wahrheitstabelle: $\neg[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \rightarrow c$

a	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**F**	**F**	**F**
b	**W**	**W**	**F**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**
c	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**
$a \wedge b$	W	W	F	F	F	F	F	F
$\neg b \vee c$	W	F	W	W	W	F	W	W
$(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)$	W	F	F	F	F	W	F	F
$\neg[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)]$	F	W	W	W	W	F	W	W
$\neg[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \rightarrow c$	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**W**	**W**	**F**

Struktur: $(Term_1) \wedge (Term_2) \wedge (Term_3)$

Kanonische KNF: $(\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c)$

DNF – DISJUNKTIVE NORMALFORM

<u>Formel:</u>
In der disjunktiven Normalform werden alle Terme mit einer Konjunktion ∨ verbunden, wobei in den Termen ausschließlich die Operatoren ∧ und ¬ vorkommen dürfen.

$$K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_{i-1} \vee K_i$$

<u>Methode:</u>
1. Im ersten Schritt bestimmen Sie die Erfüllungsmenge der umzuwandelnden Formel mittels einer Wahrheitstabelle.

2. Jedes *W* in der Lösung muss in der disjunktiven Normalform ein Klammerausdruck erzeugt werden.

3. In dem durch den 2. Schritt bestimmte Eingabemuster wird die Variable, die als Eingabewert ein *F* negiert.

DNF - BEISPIEL

Wahrheitstabelle: $[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \leftrightarrow c$

a	W	W	W	W	F	F	F	F
b	W	W	F	F	W	W	F	F
c	W	F	W	F	W	F	W	F
$a \wedge b$	W	W	F	F	F	F	F	F
$\neg b \vee c$	W	F	W	W	W	F	W	W
$(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)$	W	F	F	F	F	W	F	F
$\neg[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \leftrightarrow c$	W	W	F	W	F	F	F	W

Struktur: $(Term_1) \vee (Term_2) \vee (Term_3) \vee (Term_4)$

Kanonische DNF: $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$

ANMERKUNG DNF / KNF

Kanonische Form:	Mittels der Wahrheitstabellen entsteht immer eine **kanonische** Struktur der DNF bzw. KNF, da die Eingabemuster stets komplett betrachtet werden müssen und dadurch ausschließlich **Min-** bzw. **Maxterme** entstehen.
Vereinfachte Form:	Durch die Gesetze der Aussagenlogik kann die kanonische Form in die äquivalente vereinfachte bzw. verkürzte Struktur der DNF und KNF überführt werden, wobei die Min- bzw. Maxterme nach und nach eliminiert werden
Disjunktive Normalform:	Zu jeder Formel, die keine **Kontradiktion** darstellt, existiert eine äquivalente (kanonische) disjunktive Normalform.
Konjunktive Normalform:	Zu jeder Formel, die keine **Tautologie** darstellt, existiert eine äquivalente (kanonische) konjunktive Normalform.

AUFGABEN

1) Bilden Sie für die folgende Formel die KNF sowie die DNF mittels Wahrheitstabelle.

   a) $[(\neg a \to b) \wedge ((a \wedge \neg c) \leftrightarrow b)]$

   b) $(x \wedge z) \vee \neg(\neg(y \wedge \neg z) \wedge (\neg x \vee z))$

2) Überführen Sie die gegebene kanonische konjunktive Normalform in die (nicht kanonische) disjunkte Normalform und benennen dabei jedes angewandte Gesetz.

   KNF: $[(a \vee b) \vee c] \wedge [(a \vee b) \vee \neg c] \wedge [(\neg a \vee b) \vee \neg c]$

   DNF: $b \vee (a \wedge \neg c)$

ZUSATZ

1) Gegeben sei die Formel mit $\big((a \wedge b) \vee c\big) \wedge \big((\neg b \wedge d) \rightarrow a\big)$.

   a) Bilden Sie durch die Anwendung der Gesetze der Aussagenlogik die disjunktive Normalform DNF dieser Formel.
   Geben Sie dabei zu jedem Schritt das angewandte Gesetz an.

   b) Überführen Sie die gegebene Formel mittels einer Wahrheitstabelle in die kanonische konjunktive Normalform KKNF