MATHEMATIK

02.11.2017

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann handelt es sich um eine Aussage bzw. Aussageform?
- ✓ Was macht die Wahrheitsbelegungsfunktion?
- ✓ Was versteht man unter Bijunktion bzw. Subjunktion?
- ✓ Wie erhält man den Kopf der Wahrheitstabelle?
- ✓ Was beschreibt der schwächste Operator einer Formel?
- ✓ Was beschreibt die Erfüllungsmenge einer Aussage?
- ✓ Was bedeutet $Bool^n$?
- ✓ Wie erzeugt man aus einer Schaltung eine Aussageform?

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Welche Gesetze der Aussagenlogik stammen aus der Mengenlehre?
- ✓ Welche Zusammenhänge sind neu?
- ✓ Was für Notationsformen gibt es?
- ✓ Wie kann man die Erfüllungsmenge interpretieren?
- ✓ Was versteht man unter einer Tautologie und einer Kontradiktion?
- ✓ Wie kann man eine Folgerung beweisen?
- ✓ Wie zeigt man die Gleichheit zweier Formeln zeigen?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

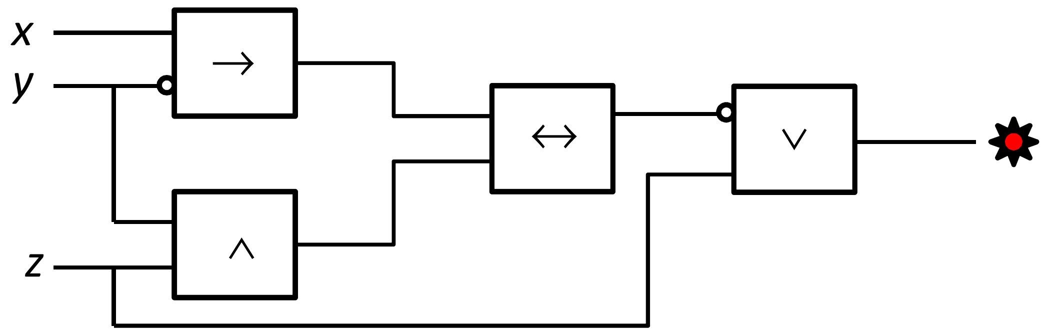
AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die Erfüllungsmenge der folgenden Aussagenformen.

a) $A(x;y;z) := \neg\left(x \wedge y\right) \leftrightarrow z \vee \neg(y \wedge x) \to z$

b) $A(x;y;z) := \neg(y \to \neg(x \vee z)) \to x \wedge \neg(y \leftrightarrow z)$

2) Geben Sie zu den folgenden Schaltungen die Erfüllungsmenge an.



GESETZE

Kommutativgesetz:	$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
Assoziativgesetz:	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
Distributivgesetz:	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
De Morgan:	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
Absorption:	$a \wedge (a \vee b) = a$	$a \vee (a \wedge b) = a$
Idempotenz:	$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$
Neutralität:	$a \wedge W = a$	$a \vee F = a$
Übergewicht:	$a \wedge F = F$	$a \vee W = W$

ZUSAMMENHÄNGE

Tertium non datur:	$a \vee \neg a = W$
Widerspruch:	$a \wedge \neg a = F$
Doppelte Negation:	$\neg(\neg a) = a$
Subjunktion:	$a \to b = (\neg a \vee b)$
Bijunktion:	$a \leftrightarrow b = ((a \to b) \wedge (b \to a))$
	$a \leftrightarrow b = ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$
Kontraposition:	$a \to b = (\neg b \to \neg a)$

BEGRIFFE

<u>Präfix (lat. prae *„vor“* und fix *„fest“*):</u>
Ist in der deutschen Sprache eine sogenannte Vorsilbe und beschreibt in der Mathematik ein Objekt, dass sich vor einem Term o.ä. befindet.

Ein Präfix vor einer Einheit gibt z.B. Auskunft darüber mit welcher Zehnerpotenz zu multiplizieren ist ($1\ GB = 1\ GigaByte = 1 \cdot 10^9\ Byte$)

<u>Infix (lat. in „hinein“ und fix *„fest“*):</u>
Ein Infix steht also innerhalb eines Ausdruck.
Dadurch existieren die Operatoren der Arithmetik in der Infix-Notation ($73 - 42$)

<u>Postfix (lat. post „nach“ und fix *„fest“*):</u>
Ein Postfix steht also stets hinter einem Term oder Ausdruck.
So ist z.B. das Gleichheitszeichen ein Postfix dar ($73 - \mathrm{x} = 42$)

FORMELKLASSEN

Je nach Art der Erfüllungsmenge kann der Ausdruck/ die Schaltung klassifiziert werden.

<u>Tautologie (allgemeingültig):</u>

Die Erfüllungsmenge der Aussage ist $Bool^n$ *, d.h. die Lampe brennt immer.*

Beispiel: $A(p,q) = p \wedge q \rightarrow p \Rightarrow E[A] = Bool^2$

<u>Kontingenz (erfüllbar):</u>

Die Anzahl der Erfüllungsmuster liegt in $[1;(n-1)]$*, d.h. die Lampe brennt manchmal.*

Beispiel: $A(a,b,c) = a \wedge (b \rightarrow \neg a \vee c) \leftrightarrow b \Rightarrow E[A] = \{(WWW);(FFW);(FFF)\}$

<u>Kontradiktion (ungültig):</u>

Die Erfüllungsmenge der Aussage ist $\{\ \}$ *, d.h. die Lampe brennt nie.*

Beispiel: $A(x,y) = (x \wedge \neg x) \wedge (y \vee \neg y \rightarrow x \leftrightarrow y) \Rightarrow E[A] = \{\ \}$

IMPLIKATION / ÄQUIVALENZ

Implikation (Folgerung):
Soll ein Ausdruck 2 die Folgerung aus einem Ausdruck 1 sein $(A_1 \rightarrow A_2)$,wird mittels Wahrheitstabelle die Subjunktion geprüft.
Stellt diese **Subjunktion** eine **Tautologie** dar, so handelt es sich um eine **Implikation**.

$$A = (A_1 \rightarrow A_2) : E[A] = Bool^n \quad \text{also} \quad A_1 \Rightarrow A_2$$

Äquivalenz (Gleichheit):
Soll ein Ausdruck 1 gleichwertig mit einem Ausdruck 2 sein $(A_1 \leftrightarrow A_2)$,wird mittels Wahrheitstabelle die Bijunktion geprüft.
Stellt diese **Bijunktion** eine **Tautologie** dar, so handelt es sich um eine **Äquivalenz**.

$$A = (A_1 \leftrightarrow A_2) : E[A] = Bool^n \quad \text{also} \quad A_1 \Leftrightarrow A_2$$

AUFGABEN

Prüfen Sie mittels Wahrheitstabelle, ob die Aussage $T_1(x, y, z) = x \wedge y \rightarrow z$ eine Folgerung aus $T_2(x, y, z) = x \wedge (y \rightarrow z)$ darstellt und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Prüfen Sie mittels Wahrheitstabelle, ob die beiden Aussagen $A_1(a,b,c) := a \wedge b \rightarrow c$ und $A_2(a,b,c) := a \wedge (b \rightarrow c)$ identisch sind.