a) $a_n = \frac{n-3}{2n}$; $n \geq 1$

Monotonie $\quad a_1 = -1$; $a_2 = -1/4$ $\quad$ Tendenz

Behauptung $\quad a_{n+1} > a_n$ $\quad$ steigend

$n = 1$ $\quad a_2 > a_1$

$-1/4 > -1$ $\checkmark$

$n+1$ $\quad a_{n+2} > a_{n+1}$

$$\frac{(n+2)-3}{2\cdot(n+2)} = \frac{n-1}{2n+4} > \frac{(n+1)-3}{2(n+1)} = \frac{n-2}{2n+2} \quad \Big|\ \begin{matrix} 2n+4 \\ 2n+2 \end{matrix}$$

$$(n-1)(2n+2) > (n-2)\cdot(2n+4)$$

$$2n^2 \underbrace{-2n+2n}_{0} -2 > 2n^2 \underbrace{-4n+4n}_{0} -8 \quad |-2n^2$$

$$-2 > -8 \quad \checkmark$$

Schranke: Da a_n streng monoton steigt, muss $a_1 = -1$ untere Schranke sein.

$$a_n < 1/2$$

$n=1$: $\quad a_1 < 1/2 \iff -1 < 1/2$ ✓

$n+1$: $\quad a_{n+1} = \dfrac{n-2}{2n+2} < \frac{1}{2} \qquad | \cdot 2 \cdot (2n+2)$

$$2n-4 < 2n+2 \qquad | -2n$$

$$-4 < 2 \quad ✓$$

Konvergenz: Da die Folge streng monoton steigt und durch -1 und $1/2$ beschränkt ist, ist sie konvergent und der Grenzwert existiert.

Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n-3}{2n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\underbrace{\frac{n \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right)}{2n}}_{1/2} \right)$$

Nullfolge

$$a_{n+1} = -\tfrac{1}{3}(3 - 2a_n) = -1 + \tfrac{2}{3}a_n \quad ; \; a_1 = 3$$

<u>Monotonie</u> $\quad a_2 = -1 + \tfrac{2}{3} \cdot a_1 = -1 + \tfrac{2}{3} \cdot 3 = 1$

$$\boxed{a_{n+1} < a_n}$$

$n = 1 \qquad a_2 < a_1 \iff 1 < 3 \quad \checkmark$

$n+1 : \qquad a_{n+2} < a_{n+1}$

$$-1 + \tfrac{2}{3} a_{n+1} < -1 + \tfrac{2}{3} a_n \quad | +1 \; \cdot \tfrac{3}{2}$$

$$a_{n+1} < a_n$$

<u>Schranke</u> $\quad a_1 = 3 \quad$ ist obere Schranke

$$a_n > -3$$

$n=1 \qquad a_1 = 3 > -3 \qquad ✓$

$n+1 \qquad a_n > -3 \longrightarrow -1 + \frac{2}{3}a_n \qquad | \cdot \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}a_n > -2 \qquad | -1$$

$$\underbrace{-1 + \frac{2}{3}a_n}_{a_{n+1}} > -3$$

Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \gamma$$

$$\left(-1 + \tfrac{2}{3} a_n = a_n \right)$$

$$-1 + \tfrac{2}{3}\gamma = \gamma \qquad \left|\, -\tfrac{2}{3}\gamma \right.$$

$$-1 = \tfrac{1}{3}\gamma \qquad \left|\, \cdot 3 \right.$$

$$-3 = \gamma$$